Il rumore nei circuiti elettrici

Il “**rumore**” elettrico e' qualsiasi segnale indesiderato presente in un circuito di comunicazione o di misura, che tende a confondere e mascherare il “**segnale**” desiderato.

Rumore e Interferenza

Interferenza: segnale indesiderato presente in un circuito come disturbo prodotto da altri circuiti o apparecchi. In teoria, eliminabile con opportuni accorgimenti.

Rumore: segnale indesiderato presente in un circuito per effetto dei meccanismi fisici di funzionamento del circuito stesso (**rumore di fondo**). Intrinseco al circuito e non riducibile oltre certi limiti.

Rumore di fondo nei circuiti elettrici

Rumore “termico” (rumore Johnson):

rumore dovuto alla agitazione termica degli elettroni di conduzione, o in generale dei portatori di carica; rumore “bianco”.

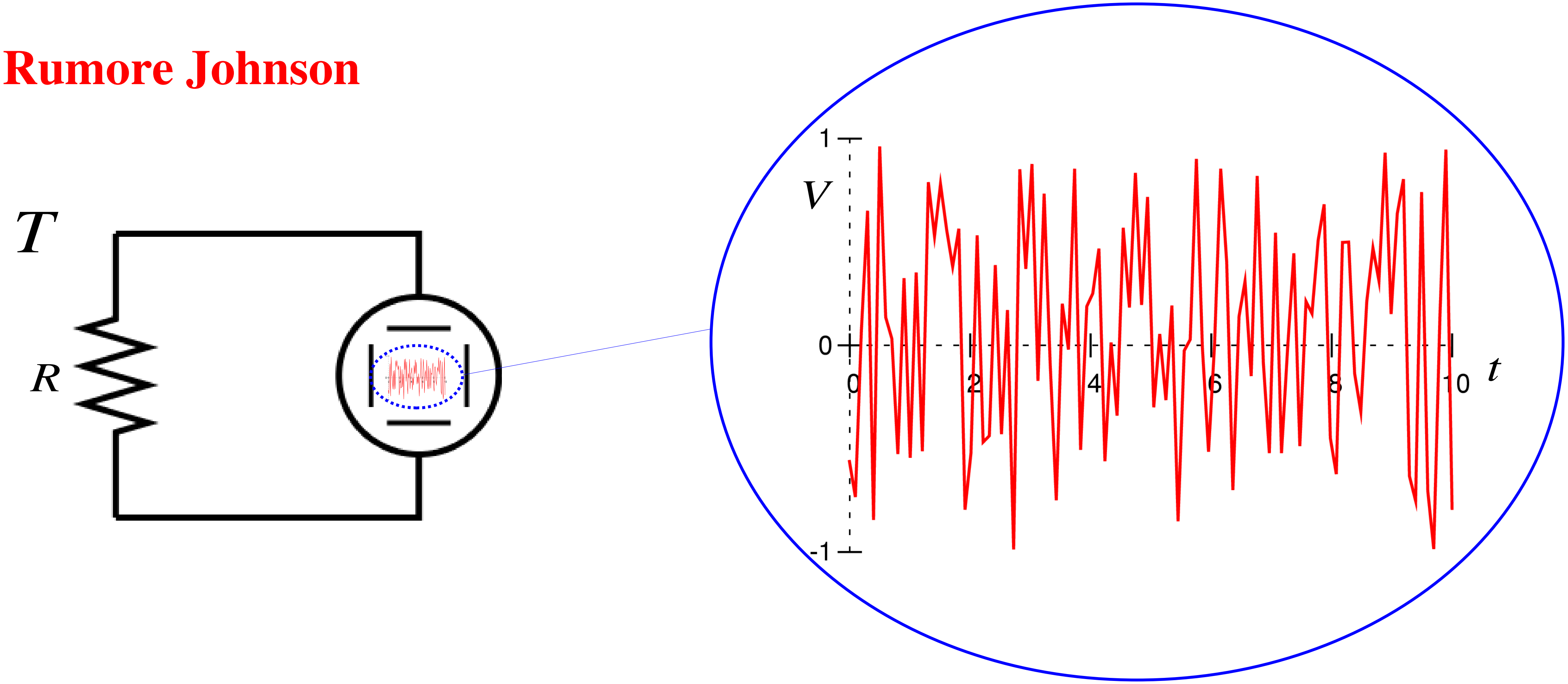
Rumore “granulare” (shot noise):

rumore dovuto alla natura “corpuscolare” della carica elettrica; rumore “bianco”.

Rumore 1/*f* (flicker noise):

rumore prodotto da una varieta' di cause fisiche, caratterizzato dall'avere una densita' spettrale con andamento $1/f$ per $f \rightarrow 0$.

Rumore Johnson



Se andiamo a misurare con un voltmetro od un oscilloscopio sufficientemente sensibili la d.d.p. presente ai capi di una resistenza *R* in cui non scorre corrente e tenuta a temperatura *T* diversa dallo zero assoluto, troveremo una debole tensione che varia continuamente in maniera casuale: e' il risultato del movimento di agitazione termica dei portatori di carica nel conduttore.

Rumore Johnson

Se un circuito elettrico ha resistenza R, questo significa che nel circuito e' presente un meccanismo capace di convertire energia elettrica in calore: $W = V^2/R$. Questo stesso meccanismo generera' a sua volta delle fluttuazioni elettriche casuali indotte dall'energia termica.

Ad ogni processo dissipativo in grado di convertire energia (ad es., elettrica o meccanica) in calore, corrisponde un processo inverso per cui il calore genera fluttuazioni nelle variabili (elettriche o meccaniche) del sistema.

Un filo elettrico a resistenza nulla e' “termicamente isolato”: non puo' cedere energia sotto forma di calore all'ambiente circostante, e non e' quindi dotato del meccanismo che permette di trasferire energia da un bagno termico agli elettroni di conduzione e generare quindi fluttuazioni elettriche.

Componenti spettrali di un segnale

Sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica di periodo T:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t) \cos n\omega t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t) \sin n\omega t \, dt$$

I coefficienti a_n e b_n rappresentano la "potenza" P di ciascuna componente armonica di frequenza angolare $n\omega$:

$$P_n = \frac{1}{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

Nel caso g(t) sia una d.d.p. applicata ad una resistenza da 1 Ω, P e' la potenza elettrica; la somma delle potenze di tutte le componenti armoniche coincide con la potenza totale del segnale (teorema di Parseval):

$$\frac{1}{T}\int_0^T g^2(t)\, dt = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

Densita' spettrale di un segnale

Per una funzione g(*t*) non periodica, la serie di Fourier e' sostituita dalla trasformata:

$$G(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-i2\pi f t}\, dt$$

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\, e^{i2\pi f t}\, df$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\, dt$$

“Energia” del segnale (rappresenta una vera energia, ad es., quando g(*t*) e' una tensione applicata ad una resistenza di 1 *Ω*). Per un segnale stazionario di durata infinita l'integrale diverge.

$$P_T=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |g(t)|^2\, dt$$

“Potenza” media del segnale troncato all'intervallo $-T/2 < t < +T/2$.

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |g(t)|^2\, dt$$

“Potenza” media del segnale.

Densita' spettrale di un segnale

Indicando con $G_T(f)$ la trasformata di Fourier della $g(t)$, troncata all'intervallo $-T/2 < t < +T/2$, per il teorema di Parseval:

$$P_T = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \left|g(t)\right|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|G_T(f)\right|^2 df$$

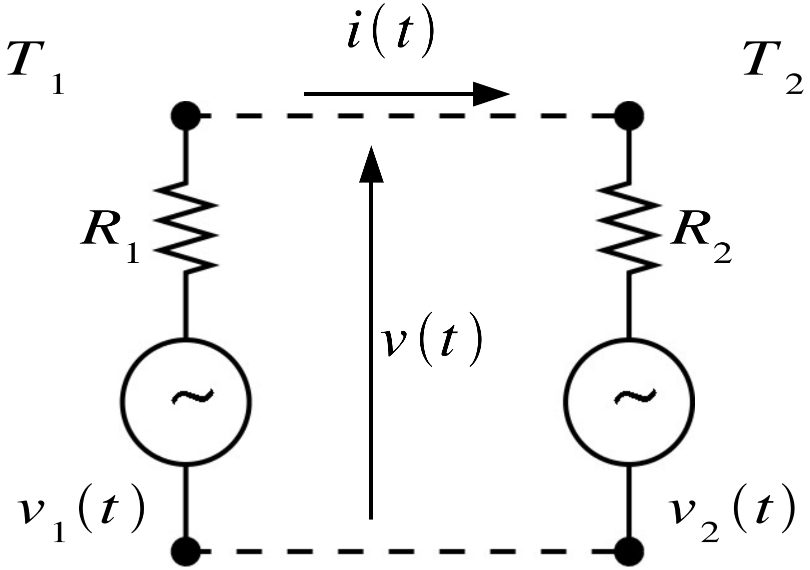
Passando al limite, per $T \rightarrow \infty$:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|G_T(f)\right|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \left|\frac{G_T(f)}{\sqrt{T}}\right|^2 df$$

La quantita' $\lim_{T\to\infty} \frac{G_T(f)}{\sqrt{T}} = h(f)$ e' la “densita' spettrale” del segnale:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|h(f)\right|^2 df$$

Tensione di rumore Johnson



$$\boxed{<v_n^2> \;\propto\; R}$$

Le due resistenze R_1 a temperatura T_1 ed R_2 a temperatura T_2 generano le tensioni di rumore $v_1(t)$ e $v_2(t)$, funzioni casuali e indipendenti del tempo.
In ogni istante $P = i(t) \cdot v(t)$ e' la potenza trasferita tra le due resistenze.

$$P = \frac{v_1 - v_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{v_1 R_2 + v_2 R_1}{R_1 + R_2} = \frac{v_1^2 R_2 - v_2^2 R_1 + v_1 v_2 (R_1 - R_2)}{(R_1 + R_2)^2}$$

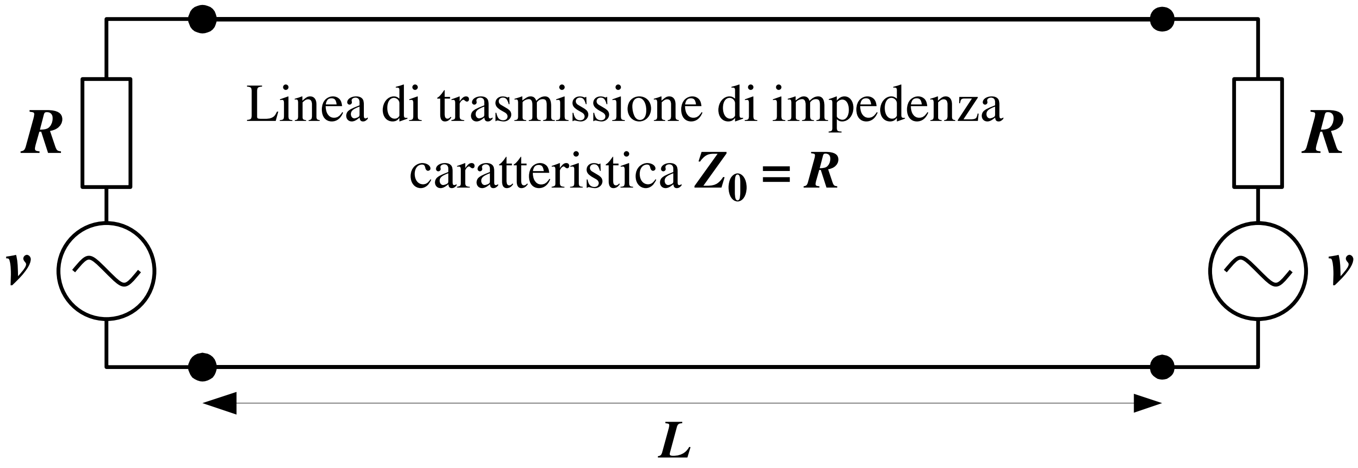
Effettuando la media sul tempo:

$$P = \frac{<v_1^2> R_2 - <v_2^2> R_1}{(R_1 + R_2)^2}$$

Se $T_1 = T_2$ ➡ $P = 0$ (II principio)
e quindi:

$$\boxed{\frac{<v_1^2>}{<v_2^2>} = \frac{R_1}{R_2}}$$

Spettro di potenza del rumore Johnson (secondo Nyquist)



Le due resistenze R sono alla stessa temperatura T.

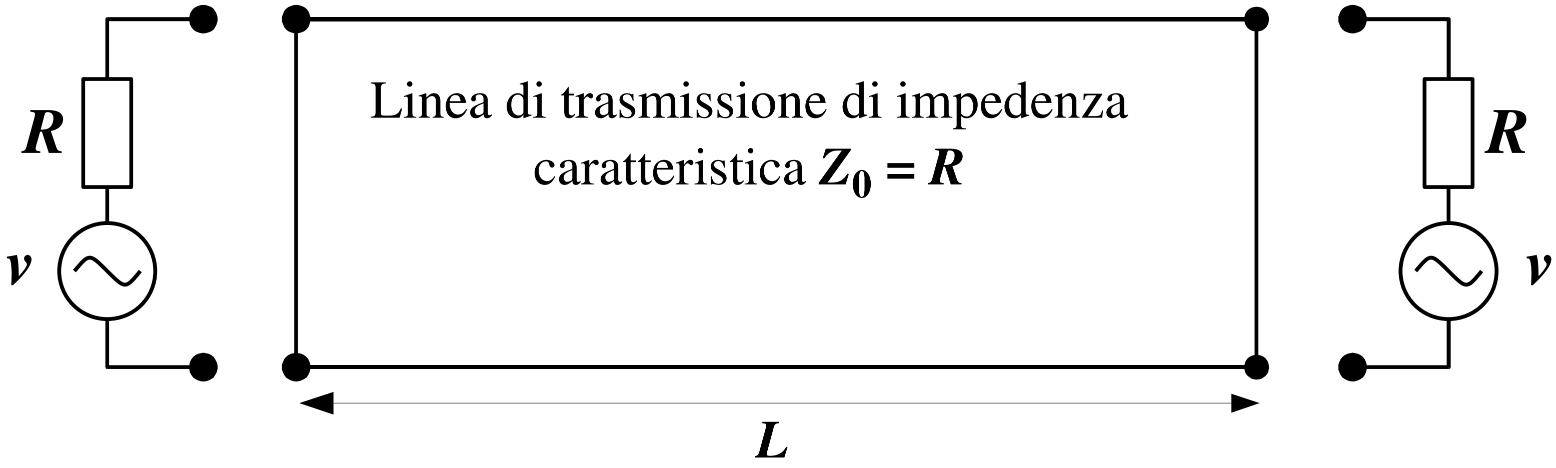
Ciascuna delle due resistenze invia sulla linea una potenza di rumore $P_N = \langle v^2 \rangle / 4R$, che viene completamente assorbita dall'altra resistenza.

La linea e' terminata sulla sua resistenza caratteristica e quindi non si ha riflessione.

I segnali viaggiano a velocita' s lungo la linea, impiegando un tempo $t = L / s$.

In ogni istante sulla linea e' presente una energia, dovuta ad entrambe le due resistenze: $\Delta W = 2 P_N t = 2 P_N L / s$.

Spettro di potenza del rumore Johnson (secondo Nyquist)

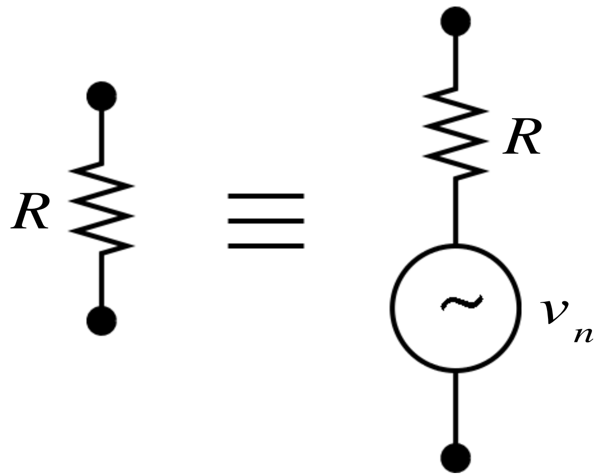


Ad un certo istante le due resistenze $\boldsymbol{R}$ vengono rimosse e la linea cortocircuitata ad entrambe le estremita'.
L'energia $2\,P_N\,t = 2\,P_N\,L\,/\,s$ rimane intrappolata lungo la linea e continua ad essere riflessa avanti e indietro.
La linea si comporta come un oscillatore armonico, i cui "modi" hanno frequenze caratteristiche $f = m\,/\,2\,t = m\,s\,/\,2\,L$.

In una banda di frequenza Δf vi sono $\Delta m = 2\,\Delta f\,L\,/\,s$ modi di oscillazione.
Ad ogni modo di oscillazione compete una energia kT (equipartizione dell'energia):

$$2\,k\,T\,\Delta f\,L\,/\,s \;=\; 2\,P_N(\Delta f)\;L\,/\,s \;\rightarrow\; P_N(\Delta f) = k\,T\,\Delta f \;\rightarrow\; \langle v^2\rangle = 4\,kT\,R\,\Delta f$$

Densita' spettrale di rumore



Ad ogni resistenza ***R*** a temperatura ***T*** e' associato in serie un generatore di tensione di rumore

$$\boxed{\begin{aligned} <v_n^2> &= 4kTR\Delta f \\ <v_n^2>/\Delta f &= 4kTR = |h(f)|^2 \end{aligned}}$$

Equivalente duale:
ad ogni resistenza ***R*** a temperatura ***T*** e' associato in parallelo un generatore di corrente di rumore

$$\boxed{<i_n^2> = 4kT\Delta f/R}$$

Esempio:

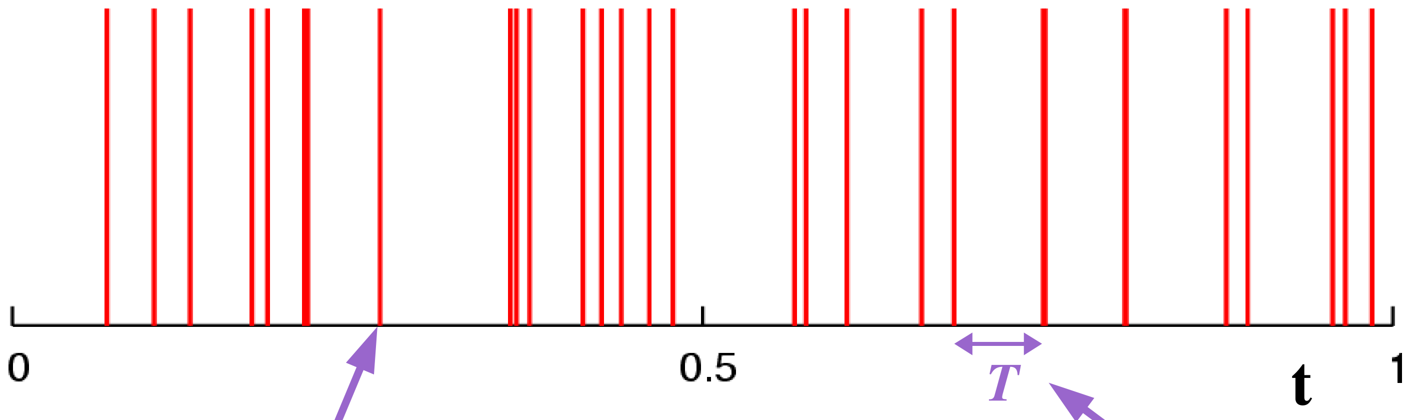
$1\ k\Omega$ a $300\ °K \rightarrow$ $4.1\ nV\ Hz^{-1/2}$
$4.1\ pA\ Hz^{-1/2}$

$100\ G\Omega$ a $300\ °K \rightarrow$ $41\ \mu V\ Hz^{-1/2}$
$0.41\ fA\ Hz^{-1/2}$

$k = costante\ di\ Boltzmann\ (1.38*10^{-23}\ J/K)$

Rumore granulare “shot”

Rumore dovuto alla natura “corpuscolare” della carica elettrica.
In alcuni dispositivi (es.: il diodo a vuoto o il diodo semiconduttore contropolarizzato) il passaggio di corrente elettrica e' dovuto alla emissione casuale di singoli elettroni.



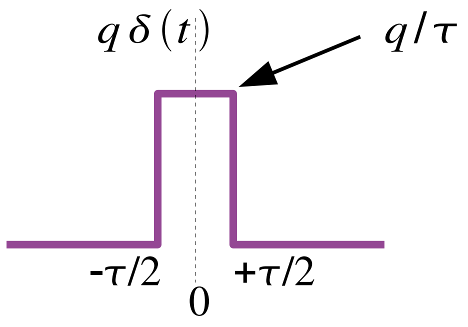
Ogni evento corrisponde al passaggio di un elettrone e quindi al trasporto di una carica q.

La durata τ di ogni evento e' molto piu' breve dell'intervallo medio $\boldsymbol{T}$ tra due eventi.

In queste condizioni, gli eventi possono essere descritti tramite una funzione $\delta(t)$ (delta di Dirac).

Rumore granulare "shot"

Schematizziamo la $\delta(t)$ di Dirac con un breve impulso rettangolare di area q:



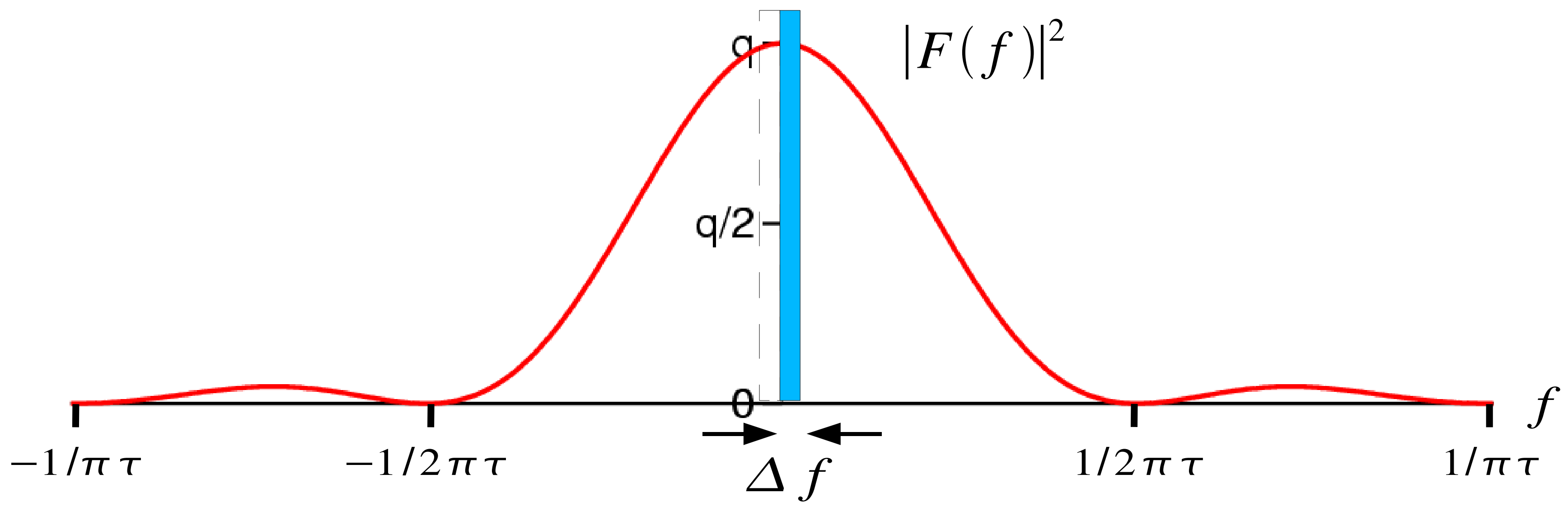
La sua trasformata e' :

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} q\,\delta(t)\,e^{-i2\pi f t}\,dt \;=\; q\,\frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}$$

e la densita' spettrale (di "energia"):

$$|F(f)|^2 = q^2 \left[\frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}\right]^2$$

Rumore granulare "shot"



Per frequenze $f << 1/2\,\pi\tau$ la densita' spettrale e' praticamente costante e "l'energia" W contenuta in una banda di frequenze Δf e':

$$W = 2\int_{f_1}^{f_2} |F(f)|^2\, df \;= 2q^2 \Delta f$$

Rumore granulare “shot”

Se si ha in media un flusso di ***n*** elettroni in un tempo ***T***, la “potenza” media di rumore “shot” (quando la corrente percorre una resistenza di 1 Ω) e':

$$I_s^2 = 2\, q^2\, \Delta f\, n / T = 2\, q\, I\, B_w$$

$$\boxed{I_s = \sqrt{2\, q\, I\, B_w}}$$

$$\frac{I_s}{I} = \sqrt{\frac{2\, q\, B_w}{I}}$$

Esempio:

$I = 1\ \mu A \ \rightarrow\ I_n = 0.57\ pA\ Hz^{-1/2}$

q = carica dell'elettrone = $1.6 \cdot 10^{-19}\ C$