# "Optical Measurements"

Master Degree in Engineering

**Automation-, Electronics-, Physics-, Telecommunication- Engineering**

# FORMULARY


prof. Cesare Svelto

Politecnico di Milano

# Radiazione e.m. e Fabry-Perot

$$\lambda \nu = c$$

$$E = h\nu = hc/\lambda$$

---

**condizione di risonanza**

in lunghezza $L = m \cdot \lambda/2$

in frequenza $\nu = m \cdot c/2L$

*free-spectral range* $\Delta\nu_{fsr} = c/2L$

***Finesse*** $F = \Delta\nu_{fsr}/\Delta\nu_c = \pi R^{1/2}/(1-R) = \pi/\gamma$ con $R=R_1=R_2$

**Larghezza di riga** $\Delta\nu_c = 1/2\pi\tau_c = c\gamma/2\pi L$

**Fattore di merito** $Q = \nu/\Delta\nu_c = (\nu/\Delta\nu_{fsr})\cdot F = m \cdot F$

$$T(\varphi) = \frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos\varphi}$$

con $\varphi = (2\pi \cdot 2L/\lambda) = (ks) =$
$= (2\pi \cdot \nu \cdot 2L/c)$

# Guadagno ottico, perdite logaritmiche efficienza diff. e Lambert-Beer

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = \sigma\left(N_2 - N_1\right)I = \sigma \Delta N \cdot I$$

$$I(l) = I(0)\exp\left[\sigma\left(N_2 - N_1\right)l\right] = I(0)G$$

$$\left(N_2 - N_1\right)_{th} = \frac{\gamma}{\sigma l} \quad \text{con } \underbrace{\gamma = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = -\frac{\ln R_1}{2} - \frac{\ln R_2}{2}}_{\text{perd.log.sing.pass. } \gamma(1)}$$

---

$$\eta_{slope} = \frac{\mathrm{d}P_l}{\mathrm{d}P_p}$$

---

$$\boldsymbol{P_\mathrm{p} = P_{\mathrm{p},0} \exp(-\alpha l)}$$

# Laser impulsati e relazioni $\lambda, L, \nu$

**Q-switching**
**Intervallo $\tau_p$ tra impulsi successivi: dipende dallo *switch***
**Durata dell'impulso $\Delta\tau_p$: dipende dal mat. attivo (10 ns)**
***duty cycle* ($\Delta\tau_p/\tau_p$) basso ⇒ potenza di picco alta (MW)**

**Mode-locking**
**$\tau_p = 2L/c$ (*round trip*)**
**$f_{rep}=1/\tau_p$ (100 MHz ÷ 10 GHz)**
**$\Delta\tau_p = 1/B_{laser}$ (10 ps ÷ 100 fs)**
**$P_{peak}$ molto alta (anche >GW)**

$$\lambda\nu = c \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta L}{L} = -\frac{\Delta\nu}{\nu}$$

# Fasci gaussiani e di Gauss-Hermite

$$E = E_0 \exp\left[-\frac{r^2}{w_0^2}\right] = E_0 \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right]$$

$$I = I_0 \exp\left[-2\left(\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right)\right] \qquad I(r) = I_0 \exp\left(-2\frac{r^2}{w_0^2}\right) \text{ con } I_0 = \frac{P_0}{\pi w_0^2/2}$$

$$P(r) = P_0 \int_0^{2(r^2/w_0^2)} e^{-\xi} \mathrm{d}\xi = P_0\left[1 - \exp\left(-2\frac{r^2}{w_0^2}\right)\right]$$

---

$$E = E_0 H_l^{(x)}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0}\right) H_m^{(y)}\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_0}\right) \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right]$$

# Propagazione libera, parametro di Rayleigh (near- e far-field), divergenza

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

$$\cong w_0$$

$$\cong w_0 \left(\frac{z\lambda}{\pi w_0^2}\right) = \frac{\lambda}{\pi w_0} z = \theta z$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \qquad \theta = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

$\theta_{MM} > \theta_{DL} = \lambda / \pi w_0$

$M^2 = (\theta_{MM} / \theta_{DL}) > 1$

$$r(z) = z \sqrt{1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2}$$

$$\cong \infty$$

$$\cong z$$

# Trasform. fasci gaussiani (lente/telescopio) *Spot size* risonatore piano-sferico

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{f}$$

$$w_0/r = w_0/L = \text{cost.}$$

---

$$m = w_0/w_{0L} = (Z/d)\cdot(1/M)$$

$$M = F/f = w_F/w_f$$

---

$$w_{0L} = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}\left[\frac{ROC}{L}-1\right]^{1/4}}$$

# Campo, Intensità, Potenza, e fotorivelatori Rivelazione diretta e coerente

- $E=E_0\exp(-j\omega_0 t)$ Campo elettrico [V/m]
- $I_0 = \frac{EE^*}{\eta_0} = \frac{E_0^2}{\eta_0}$ Intensità [W/m²] $\eta_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} = 377\ \Omega$ impedenza caratteristica del vuoto
- $P = \int I dS$ Potenza [W] con $E_0 = \sqrt{P_0\, \eta_0 / \left(\pi w_0^2/2\right)} \propto \sqrt{P_0}$

---

$$h\nu > E_g \qquad \eta = \frac{\Delta N_e}{\Phi \Delta t} \qquad \rho = \frac{i}{P} = \frac{\eta e}{h\nu} = \frac{\eta e \lambda}{hc}$$

$$v = G_{i\to v} \cdot i = G_{i\to v} \cdot \rho \cdot P \propto P \propto I \propto EE^* = |E|^2$$

---

$$E(t)=E_0[1+a(t)]\exp[-j(2\pi\nu_0 t+\phi(t))]$$

$$v(t) \propto EE^* = (E_0)^2\,[1+a(t)]^2 \propto P(t)=P_0\,\alpha\,\mathrm{mod}(t)$$

$$P(t) = P_\mathrm{R} + P_\mathrm{L} + 2\sqrt{P_\mathrm{R} P_\mathrm{L}}\cos\left[2\pi(\nu_0 - \nu_\mathrm{L})t + \phi(t)\right]$$

# Telemetri a triangolazione

- $\boldsymbol{L = \frac{D}{\tan \alpha} \simeq \frac{D}{\alpha}}$ (equazione misura), differenziandola si ottiene:
- $\boldsymbol{\Delta L = -\frac{L^2}{D} \cdot \Delta\alpha \rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta\alpha} = -\frac{L}{\alpha}}$ (sensibilità)

---

- $\boldsymbol{\alpha = \arctan\frac{x}{f_{rec}} \simeq \frac{x}{f_{rec}}}$ (rivelazione attiva)

*a)* $\boldsymbol{L \simeq \frac{D}{x} \cdot f_{rec}}$ e $\boldsymbol{\Delta L = -L \cdot \frac{\Delta x}{x} = -L \cdot \frac{\Delta\alpha}{\alpha}}$

# Telemetri a tempo di volo (tof)

Pulsato (impulsi Q-switching di durata $\tau_p \ll T_{rep}$ )

- $L = \frac{c}{2} T \rightarrow \Delta L = L \cdot \frac{\Delta T}{T}$ (equazione misura)
- $\sigma_t = \frac{T_{CK}}{\sqrt{12}} \rightarrow \sigma_T^2 = \sigma_{t_{start}}^2 - \sigma_{t_{stop}}^2 \simeq \sigma_{t_{stop}}^2$
- $L \leq L_{na} = \frac{c}{2} T_{rep}$ (lunghezza di non ambiguità)

A onda continua (CW)

- $P(t) = P_0[1 + m\sin(2\pi f_m t)]$ (potenza ottica modulata)
- $L = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{2\pi f_m} \cdot \Delta\varphi$ (equazione misura)
- $L \leq L_{na} = \frac{c}{2 f_m}$ (lunghezza di non ambiguità)

# Brillanza e angolo solido

- $\boldsymbol{B_s = \frac{P_s}{\pi A_s}}$ (brillanza diffusore lambertiano*)
- $\boldsymbol{\Omega_r = \frac{\pi D_r^2}{4} \cdot \frac{1}{L^2}}$ (angolo solido sotto il quale vedo un oggetto di diametro $D_r$ da distanza $L$, se $\frac{D_r}{2} \ll L$ )
- $\boldsymbol{P_r = B_s \cdot A_s \cdot \Omega_r}$ (potenza ricevuta)

---

* La brillanza di una sorgente di area $A_s$ in una data direzione inclinata di $\theta$ rispetto alla normale ad $A_s$ è definita come $B = \frac{dP}{A_s cos\theta d\Omega}$. Essendo, per definizione, l'angolo solido infinitesimo pari a $d\Omega = d\varphi \sin\theta \, d\theta$ e ponendo $B$ costante (emettitore lambertiano) si ha $P = \int_{semisfera} BA_s \cos\theta d\Omega =$

$$= BA \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \pi BA$$

# Power budget e accuratezza

- $\frac{P_R}{P_S} = G \cdot \frac{D_r^2}{4L_{eq}^2}$ (potenza sul rivelatore) con

  a) $G = \frac{T_{opt}}{\theta_s^2}$ (bersaglio cooperativo)

  b) $G = \delta \cdot T_{opt}$ (bersaglio non cooperativo)

- $L_{eq} = \frac{L}{\sqrt{T_{atm}}} = \frac{L}{\sqrt{e^{-\alpha(\lambda)\cdot 2L}}}$ (lunghezza ottica)

---

- $\sigma_T \propto \frac{\tau_p}{\sqrt{N_{ph}}}$ (accuratezza pulsed tof)

# Rumore telemetri

- $\rho = \frac{\eta e}{h\nu}$ (responsività)
- $P_n = \frac{1}{\rho}\left(2qi_s + 2qi_{el} + 2qi_{bg}\right) \cdot BW$

  (potenza di rumore) dove:

  *a)* $i_s = \rho P_r$ (corrente di segnale)

  *b)* $i_{el}$ = corrente shot equivalente del rumore dell'elettronica

  $(D_r)$ $\pi D_r^2$ (luce di fondo)

# Velocimetri (LDV)

- $\boldsymbol{\nu' = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \cdot \nu}$ (effetto Doppler)
- $\boldsymbol{D = \frac{\lambda}{2 \sin \varphi}}$ (distanza tra due frange, fasci inclinati di $\varphi$ con l'asse ottico)
- $\boldsymbol{v = f_d D = \frac{\lambda f_d}{2 \sin \varphi}}$ (equazione della misura)

nb: devo misura la <u>frequenza</u> di un segnale di potenza ottica ($f_d$) e non l'ampiezza…

# Interferometria

- $I_{ph} = I_m + I_r + 2\sqrt{I_m I_r}\cos\left(2k(s_m + \Delta s - s_r)\right)$
- $\Delta\varphi = 2k\Delta s > 2\pi \rightarrow \Delta s > \frac{\lambda}{2}$ (risoluzione)
- $V = \frac{I_{ph,M} - I_{ph,m}}{I_{ph,M} + I_{ph,m}} = e^{-\frac{|s_m - s_r|}{L_c}}$ (visibilità frange)
- $L_c = c \cdot \tau_c \simeq \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda_L}$ (lunghezza di coerenza temporale)

  → posso misurare solo se $|s_m - s_r| = \Delta L < L_c$

# Interferometria

- $\boldsymbol{\Delta\nu_L = \frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda_L}$ (larghezza di riga sorgente laser)
- $\boldsymbol{\Delta s_n = \frac{\lambda_0}{\pi L_c} \cdot (s_m - s_r) = (s_m - s_r) \cdot \frac{\Delta\nu_L}{\nu_0}}$
  (NED di fase)
- $\boldsymbol{\Delta s_q = \frac{\lambda}{2\pi V} \cdot \sqrt{\frac{h\nu B}{2\eta P_0}}}$ (NED quantica, quando aggancio il segnale a mezza frangia (misuro $\Delta s \ll \lambda$))

# Speckle Pattern

- $$\begin{cases} s_t = \frac{\lambda z}{D} \ll s_l \\ s_l = \lambda \cdot \left(\frac{2z}{D}\right)^2 \end{cases}$$ (dimensioni speckle)

- $\Delta s_n = \frac{\lambda^2}{\pi (\mathrm{NA_{eff}})^2 \cdot s_l}$ (NED interf. a speckle pattern)

  con $(\mathrm{NA_{eff}})^2 = \frac{D}{2f}$ (apertura numerica lente)

# Oscillatori e stabilizzazione

- $f_{rin} = \sqrt{\frac{x-1}{\tau_c \tau_{sp}}}$ (frequenza oscillazioni rilassamento)
- $\tau_{rin} = \frac{2\tau_{sp}}{x}$ (tempo di decadimento oscillazioni)
- $x = \frac{P_{pump}}{P_{threshold}}$ (coeffciente di sopra soglia laser)
- $RIN(f) = \frac{S_{\Delta P}}{\langle P \rangle^2}$ (relative intensity noise)

$\left\langle (f_{j+1} - f_j)^2 \right\rangle$

# "Optical Measurements"

Master Degree in Engineering

**Automation-, Electronics-, Physics-, Telecommunication- Engineering**

# INTERESTING 'LINKS'

prof. Cesare Svelto

Politecnico di Milano

# Comments on Teaching and WEB material

**TEACH** ≠ "divulgate"

**KNOWLEDGE&UNDERSTANDING** ≠ "having hints"

**THEORY** comes BEFORE **PRACTICE** (but both are important!)

**QUESTIONS** and SELF-QUESTIONS are paramount

LASERs: How they Work?
https://www.youtube.com/watch?v=GhCR8s3da9I
**and HOW NOT TO EXPLAIN/STUDY IN A UNIVERSITY!!!**

We can both "**Teach" and "give information"** (both useful). Receiving Teaching and not only information, might be harder, but provides for **Insight and Knowledge** in a way that University should mostly do as opposed to Internet and TV material, which scope can be simply different (give hints and entertain). **Learning and deeply understanding what we study** helps in growing **Knowledge** for personal Culture and Work challenges.

# Properties of the LASERs

Monochromaticity
https://www.youtube.com/watch?v=y-JCF3K9ntc

Ruby LASER
https://www.youtube.com/watch?v=9JDrdxP7Au4

Solid-State LASER Crystals
http://www.roditi.com/Laser/GenDescr.html

# LASER Fundamentals (MIT)

Laser Fundamentals I (58m:15s)
https://www.youtube.com/watch?v=rgivGZqFcfY&list=PLCAA55F833DC09186&index=3

Laser Fundamentals II (54m:50s)
https://www.youtube.com/watch?v=rgivGZqFcfY&list=PLCAA55F833DC09186&index=4

Laser Fundamentals II (55m:35s)
https://www.youtube.com/watch?v=YVqoVl-CYKo&index=6&list=PLCAA55F833DC09186