“Misure Ottiche ”

Corsi di Laurea Magistrale in Ingegneria
Elettronica e delle Telecomunicazioni
e Ingegneria Fisica e dell’Automazione

FORMULARIO

prof. Cesare Svelto
(con la cortese collaborazione dello studente
ing. Davide Resnati AA 2013/2014)
Politecnico di Milano

Radiazione e.m. e Fabry-Perot

$$\lambda\nu = c$$

$$E = h\nu = hc/\lambda$$

---

condizione di risonanza

in lunghezza $\mathbf{L = m \cdot \lambda/2}$

in frequenza $\boldsymbol{\nu = m \cdot c/2L}$

free-spectral range $\boldsymbol{\Delta\nu_{fsr} = c/2L}$

Finesse $\boldsymbol{F = \Delta\nu_{fsr}/\Delta\nu_c = \pi R^{1/2}/(1-R)} = \pi/\gamma$ con $\boldsymbol{R=R_1=R_2}$

Larghezza di riga $\boldsymbol{\Delta\nu_c = 1/2\pi\tau_c} = c\gamma/2\pi L$

Fattore di merito $\boldsymbol{Q = \nu/\Delta\nu_c} = (\nu/\Delta\nu_{fsr})\cdot F = m \cdot F$

$$T(\varphi) = \frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos\varphi}$$

con $\varphi = (2\pi\cdot 2L/\lambda) = (ks) =$
$= (2\pi\cdot\nu\cdot 2L/c)$

Guadagno ottico, perdite logaritmiche efficienza diff. e Lambert-Beer

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = \sigma\left(N_2 - N_1\right)I = \sigma\Delta N \cdot I$$

$$I(l) = I(0)\exp\left[\sigma\left(N_2 - N_1\right)l\right] = I(0)G$$

$$\left(N_2 - N_1\right)_{th} = \frac{\gamma}{\sigma l} \quad \text{con } \underbrace{\gamma = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = -\frac{\ln R_1}{2} - \frac{\ln R_2}{2}}_{\text{perd.log.sing.pass. } \gamma(1)}$$

$$\eta_{slope} = \frac{\mathrm{d}P_l}{\mathrm{d}P_p}$$

$$\mathbf{P_p = P_{p,0}\ exp\ (-\alpha l)}$$

Laser impulsati e relazioni λ, L, ν

Q-switching
Intervallo τ_p tra impulsi successivi: dipende dallo *switch*
Durata dell'impulso $\Delta\tau_p$: dipende dal mat. attivo (10 ns)
***duty cycle* ($\Delta\tau_p/\tau_p$) basso $\Rightarrow$ potenza di picco alta (MW)**

Mode-locking
$\tau_p = 2L/c$ (*round trip*)
$f_{rep}=1/\tau_p$ (100 MHz $\div$ 10 GHz)
$\Delta\tau_p = 1/B_{laser}$ (10 ps $\div$ 100 fs)
P_{peak} molto alta (anche >GW)

$$\boxed{\lambda\nu = c \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta L}{L} = -\frac{\Delta\nu}{\nu}}$$

Fasci gaussiani e di Gauss-Hermite

$$E = E_0 \exp\left[-\frac{r^2}{w_0^2} \right] = E_0 \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right]$$

$$I = I_0 \exp\left[-2\left(\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right) \right] \qquad I(r) = I_0 \exp\left(-2\frac{r^2}{w_0^2} \right) \text{ con } I_0 = \frac{P_0}{\pi w_0^2 / 2}$$

$$P(r) = P_0 \int_0^{2(r^2/w_0^2)} e^{-\xi} d\xi = P_0 \left[1 - \exp\left(-2\frac{r^2}{w_0^2} \right) \right]$$

$$E = E_0 H_l^{(x)}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0} \right) H_m^{(y)}\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_0} \right) \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right]$$

Propagazione libera, parametro di Rayleigh (*near-* e *far-field*), divergenza

$$w(z)=w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

$$\cong w_0$$

$$\cong w_0\left(\frac{z\lambda}{\pi w_0^2}\right)=\frac{\lambda}{\pi w_0}z=\theta z$$

$$z_R=\frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

$$\theta=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{\lambda}{\pi w_0}$$

$$\theta_{MM}>\theta_{DL}=\lambda/\pi w_0$$

$$M^2=(\theta_{MM}/\theta_{DL})>1$$

$$r(z)=z\sqrt{1+\left(\frac{z_R}{z}\right)^2}$$

$$\cong\infty$$

$$\cong z$$

Trasform. fasci gaussiani (lente/telescopio) *Spot size* risonatore piano-sferico

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{f}$$

$$w_0/r = w_0/L = \text{cost.}$$

$$m = w_0/w_{0L} = (Z/d)\cdot(1/M)$$

$$M = F/f = w_F/w_f$$

$$w_{0L} = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}\left[\frac{ROC}{L}-1\right]^{1/4}}$$

Campo, Intensità, Potenza, e fotorivelatori Rivelazione diretta e coerente

- $E = E_0 \exp(-j\omega_0 t)$ Campo elettrico [V/m]
- $I_0 = \frac{EE^*}{\eta_0} = \frac{E_0^2}{\eta_0}$ Intensità [W/m²] $\eta_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} = 377\ \Omega$ impedenza caratteristica del vuoto
- $P = \int I \mathrm{d}S$ Potenza [W] con $E_0 = \sqrt{P_0\, \eta_0 / \left(\pi w_0^2/2\right)} \propto \sqrt{P_0}$

$h\nu > E_g$ $\qquad \eta = \frac{\Delta N_e}{\Phi \Delta t}$ $\qquad \rho = \frac{i}{P} = \frac{\eta e}{h\nu} = \frac{\eta e \lambda}{hc}$

$$v = G_{i\to v} \cdot i = G_{i\to v} \cdot \rho \cdot P \propto P \propto I \propto EE^* = |E|^2$$

$$E(t) = E_0[1 + a(t)]\exp[-j(2\pi\nu_0 t + \phi(t))]$$

$$v(t) \propto EE^* = (E_0)^2\, [1 + a(t)]^2 \propto P(t) = P_0\, \alpha\, \mathrm{mod}(t)$$

$$P(t) = P_R + P_L + 2\sqrt{P_R P_L}\cos[2\pi(\nu_0 - \nu_L)t + \phi(t)]$$

Telemetri a triangolazione

- $\boldsymbol{L = \frac{D}{\tan\alpha} \simeq \frac{D}{\alpha}}$ (equazione misura), differenziando si ottiene:
- $\boldsymbol{\Delta L = -\frac{L^2}{D} \cdot \Delta\alpha \rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta\alpha} = -\frac{L}{\alpha}}$ (sensibilità)

- $\boldsymbol{\alpha = \arctan\frac{x}{f_{rec}} \simeq \frac{x}{f_{rec}}}$ (rivelazione attiva)

  a) $\boldsymbol{L \simeq \frac{D}{x} \cdot f_{rec}}$ e $\boldsymbol{\Delta L = -L \cdot \frac{\Delta x}{x} = -L \cdot \frac{\Delta\alpha}{\alpha}}$

  b) $\boldsymbol{w_{rec} = w_l \frac{f_{rec}}{f_{ill}}}$ (*spot size* sul rivelatore)

Telemetri a tempo di volo (TOF)

<u>Pulsato (impulsi Q-*switching*</u> di durata $\tau_p \ll T_{rep}$)

- $\boldsymbol{L = \frac{c}{2}T \rightarrow \Delta L = L \cdot \frac{\Delta T}{T}}$ (equazione misura)
- $\boldsymbol{\sigma_t = \frac{T_{CK}}{\sqrt{12}} \rightarrow \sigma_T^2 = \sigma_{t_{start}}^2 - \sigma_{t_{stop}}^2 \simeq \sigma_{t_{stop}}^2}$
- $\boldsymbol{L \leq L_{na} = \frac{c}{2}T_{rep}}$ (lunghezza di non ambiguità)

<u>A onda continua (CW)</u>

- $\boldsymbol{P(t) = P_0[1 + m\sin(2\pi f_m t)]}$ (potenza ottica modulata)
- $\boldsymbol{L = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{2\pi f_m} \cdot \Delta\varphi}$ (equazione misura)
- $\boldsymbol{L \leq L_{na} = \frac{c}{2f_m}}$ (lunghezza di non ambiguità)

Brillanza e angolo solido

- $\boldsymbol{B_s = \frac{P_s}{\pi A_s}}$ (brillanza diffusore lambertiano*)
- $\boldsymbol{\Omega_r = \frac{\pi D_r^2}{4} \cdot \frac{1}{L^2}}$ (angolo solido sotto il quale vedo un oggetto di diametro D_r da distanza L, se $\frac{D_r}{2} \ll L$)
- $\boldsymbol{P_r = B_s \cdot A_s \cdot \Omega_r}$ (potenza ricevuta)

---

* La brillanza di una sorgente di area A_s in una data direzione inclinata di θ rispetto alla normale ad A_s è definita come $B = \frac{dP}{A_s cos\theta d\Omega}$. Essendo, per definizione, l'angolo solido infinitesimo pari a $d\Omega = d\varphi \sin\theta \, d\theta$ e ponendo B costante (emettitore lambertiano) si ha $P = \int_{semisfera} BA_s \cos\theta d\Omega =$

$$= BA \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \pi BA$$

Power budget e accuratezza

- $\frac{P_R}{P_S} = G \cdot \frac{D_r^2}{4L_{\mathrm{eq}}^2}$ (potenza sul rivelatore) con
  - *a)* $G = \frac{T_{\mathrm{opt}}}{\theta_s^2}$ (bersaglio cooperativo)
  - *b)* $G = \delta \cdot T_{\mathrm{opt}}$ (bersaglio non cooperativo)
- $L_{eq} = \frac{L}{\sqrt{T_{\mathrm{atm}}}} = \frac{L}{\sqrt{e^{-\alpha(\lambda)\cdot 2L}}}$ (lunghezza ottica)

- $\sigma_T \propto \frac{\tau_p}{\sqrt{N_{\mathrm{ph}}}}$ (accuratezza *pulsed* TOF)
- $\sigma_T \propto \frac{1}{2\pi f_{\mathrm{m}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{ph}}}}$ (accuratezza CW TOF)

Rumore telemetri

- $\boldsymbol{\rho = \frac{\eta e}{h\nu}}$ (responsività)
- $\boldsymbol{P_{\mathrm{n}} = \frac{1}{\rho}\left(2qi_{\mathrm{s}} + 2qi_{\mathrm{el}} + 2qi_{\mathrm{bg}}\right) \cdot BW}$

  (potenza di rumore) dove:

  a) $\boldsymbol{i_s = \rho P_{\mathrm{r}}}$ (corrente di segnale)

  b) $\boldsymbol{i_{el}} =$ corrente *shot* equivalente del rumore dell'elettronica

  c) $\boldsymbol{i_{\mathrm{bg}} = \rho[\delta_{\mathrm{sc}} E_{\mathrm{sc}} \Delta\lambda \cdot \sin^2\left(\frac{D_r}{2f}\right) \cdot \frac{\pi D_{\mathrm{r}}^2}{4}]}$ (luce di fondo)

Velocimetri (LDV)

- $\boldsymbol{\nu'} = \left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{c}}\right) \cdot \boldsymbol{\nu}$ (effetto Doppler)
- $\boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{2}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\varphi}}$ (distanza tra due frange, fasci inclinati di φ con l'asse ottico)
- $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}_{\mathbf{d}}\boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{\lambda f}_{\mathbf{d}}}{\mathbf{2}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\varphi}}$ (equazione della misura)

  N.B.: devo misura la <u>frequenza</u> (f_d) di un segnale di potenza ottica e non l'ampiezza…

Interferometria

- $\boldsymbol{I_{\mathrm{ph}} = I_{\mathrm{m}} + I_{\mathrm{r}} + 2\sqrt{I_{\mathrm{m}} I_{\mathrm{r}}}\cos\left(2k(s_{\mathrm{m}} + \Delta s - s_{\mathrm{r}})\right)}$
- $\boldsymbol{\Delta\varphi = 2k\Delta s > 2\pi \rightarrow \Delta s > \frac{\lambda}{2}}$ (risoluzione)
- $\boldsymbol{V = \frac{I_{\mathrm{ph,M}} - I_{\mathrm{ph,m}}}{I_{\mathrm{ph,M}} + I_{\mathrm{ph,m}}} = e^{-\frac{|s_{\mathrm{m}} - s_{\mathrm{r}}|}{L_{\mathrm{c}}}}}$ (visibilità frange)
- $\boldsymbol{L_c = c \cdot \tau_c \simeq \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda_{\mathrm{Laser}}}}$ (lunghezza di coerenza temporale)

  → posso misurare solo se $|s_{\mathrm{m}} - s_{\mathrm{r}}| = \Delta L < L_{\mathrm{c}}$ altrimenti vedo solo salti di fase casuali…

Interferometria

- $\boldsymbol{\Delta\nu_{\mathrm{L}} = \frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda_{\mathrm{L}}}$ (larghezza di riga sorgente laser)
- $\boldsymbol{\Delta s_{\mathrm{n}} = \frac{\lambda_0}{\pi L_{\mathrm{c}}} \cdot (s_{\mathrm{m}} - s_{\mathrm{r}}) = (s_{\mathrm{m}} - s_{\mathrm{r}}) \cdot \frac{\Delta\nu_{\mathrm{L}}}{\nu_0}}$ (NED di fase)
- $\boldsymbol{\Delta s_{\mathrm{q}} = \frac{\lambda}{2\pi V} \cdot \sqrt{\frac{h\nu B}{2\eta P_0}}}$ (NED quantica, quando aggancio il segnale a mezza frangia (misuro $\Delta s \ll \lambda$))

Speckle Pattern

- $\begin{cases} \boldsymbol{s}_{\mathbf{t}} = \dfrac{\boldsymbol{\lambda z}}{\boldsymbol{D}} \ll \boldsymbol{s}_{\mathbf{l}} \\ \boldsymbol{s}_{\mathbf{l}} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \left(\dfrac{\mathbf{2}\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{D}}\right)^{\mathbf{2}} \end{cases}$ (dimensioni *speckle*)
- $\boldsymbol{\Delta s}_{\mathbf{n}} = \dfrac{\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{\pi}(\mathbf{NA}_{\mathbf{eff}})^{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{s}_{\mathbf{l}}}$ (NED interf. a *speckle pattern*)

  con $(\mathbf{NA}_{\mathbf{eff}})^{\mathbf{2}} = \dfrac{\boldsymbol{D}}{\mathbf{2}\boldsymbol{f}}$ (apertura numerica lente)

Oscillatori e stabilizzazione

- $\boldsymbol{f_{RIN} = \sqrt{\frac{x-1}{\tau_c \tau_{sp}}}}$ (frequenza oscillazioni rilassamento)
- $\boldsymbol{\tau_{RIN} = \frac{2\tau_{sp}}{x}}$ (tempo di decadimento oscillazioni)
- $\boldsymbol{x = \frac{P_{pump}}{P_{threshold}}}$ (coefficiente di sopra soglia laser)
- $\boldsymbol{RIN(f) = \frac{S_{\Delta P}}{\langle P \rangle^2}}$ (Relative Intensity Noise)
- $\boldsymbol{\sigma_y^2 = \frac{\left\langle \left(f_{j+1} - f_j\right)^2 \right\rangle}{2f^2}}$ (varianza di Allan = media (normalizzata) dei quadrati delle differenza tra campioni adiacenti della frequenza di battimento tra due oscillatori isofrequenziali)