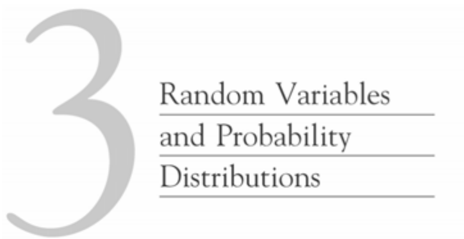
# *Variabili Casuali e Distribuzioni di Probabilità*






# *VARIABILI CASUALI*

Definizione:

Una **variabile casuale** $X$ è una variabile numerica il cui valore misurato può cambiare ripetendo lo stesso esperimento di misura

$X$ può essere una **variabile continua** o **discreta**



# *VARIABILI CASUALI*

Esempi di variabili **continue**:
Il tempo, lo spazio, l'energia, la temperatura, la pressione, la corrente elettrica…

*Tutte le grandezze che possono essere messe in corrispondenza con il campo dei **numeri reali** (attraverso un'opportuna unità di misura)*

Esempi di variabili **discrete**:
Numero di giornate piovose, numero di pezzi difettosi in un lotto di produzione, pagine di un libro, numero di accessi a un *server*…

*Tutte le grandezze che possono essere messe in corrispondenza con il campo dei **numeri interi** (attraverso un'opportuna unità di misura)*



# *PROBABILITÀ*

La probabilità è utilizzata per quantificare numericamente la possibilità che un dato evento si realizzi.

Ad esempio, per stabilire se è facile o no che una misura fornisca un valore all'interno di un determinato intervallo.

Può essere interpretata come il **grado di fiducia** che un evento si realizzi, o come la sua **frequenza relativa di realizzazione**.

*La probabilità è quantificata assegnando un **numero tra 0 e 1***
*(0% e 100%)*
*Più è alto il numero più l'evento è probabile:*
   ***0 = evento impossibile***
   ***1 = evento certo***

# Proprietà della funzione Probabilità

Se $X$ è una variabile casuale

1. $P(X \in \Re) = 1$, dove $\Re$ è l'insieme dei numeri reali
2. $0 \leq P(X \in E) \leq 1$ per ogni insieme ( solitamente $E \in \Re$ )
3. Se $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sono insiemi mutuamente esclusivi, allora $P(X \in E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k) = P(X \in E_1) + P(X \in E_2) + \ldots + P(X \in E_k)$

Mutuamente esclusivi (o disgiunti) ≡ insieme intersezione vuoto

5

# Utilizzo delle proprietà della Probabilità

1. Mostra che il massimo valore di una probabilità è 1
2. Implica che una probabilità non può essere negativa
3. Può essere utilizzata per mettere in relazione la probabilità di un insieme $E$ e del suo complementare $E'$ (insieme degli elementi che non appartengono ad $E$):

$E \cup E' = \Re$ , $1 = P(X \in \Re) = P(X \in E \cup E') = P(X \in E) + P(X \in E')$

$\Rightarrow$ $P(X \in E') = 1 - P(X \in E)$

6

# Eventi

Il concetto di probabilità non è applicabile solo a insiemi di numeri, ma anche ad eventi: non sempre il valore misurato è ottenuto da un esperimento.

Gli eventi si possono classificare in categorie ed essere trattati esattamente allo stesso modo degli insiemi di numeri reali.

7

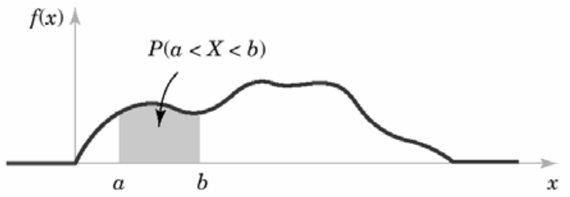
# VARIABILI CASUALI CONTINUE

8

# Funzione Densità di Probabilità (PDF)

La **funzione densità di probabilità $f(x)$** di una variabile casuale continua $X$ è utilizzata per determinare la **probabilità che $X$ appartenga a un dato intervallo**:

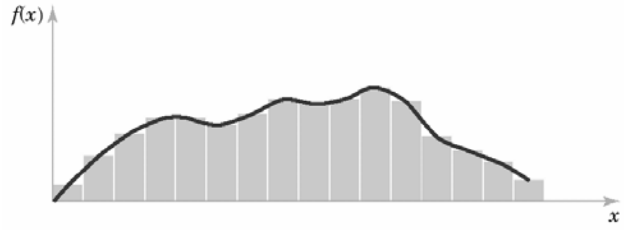
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$






# Funzione Densità di Probabilità

Un istogramma è un'approssimazione della funzione densità di probabilità: <u>l'area di ogni settore rappresenta la frequenza relativa (probabilità) dell'intervallo</u> in ascisse <u>(classe)</u> corrispondente.




**Per $\Delta x \to 0$ l'istogramma tende alla curva continua $f(x)$ che è la funzione densità di probabilità (PDF)**



# Proprietà della PDF

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = P(-\infty < X < +\infty) = 1$$ AREA UNITARIA della PDF

$f(x)$ è usata per calcolare aree e non valori puntuali:

se $X$ è una variabile casuale continua, $\boldsymbol{P(X=x_0) = 0}$, per ogni $x_0$

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$

**ATTENZIONE: a volte ci si può confondere con la notazione, lasciando sottinteso un intervallo di valori (tipicamente la risoluzione dello strumento di misura)**

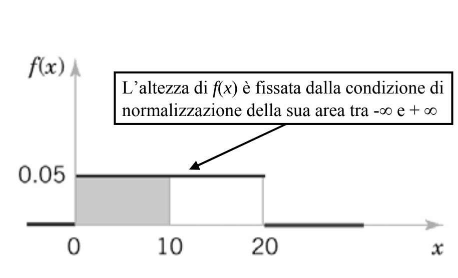
ESEMPIO: $V$=1.74 V, con risoluzione 0.01 V significa

1.735 V $\le V <$ 1.745 V



# Esempio di PDF

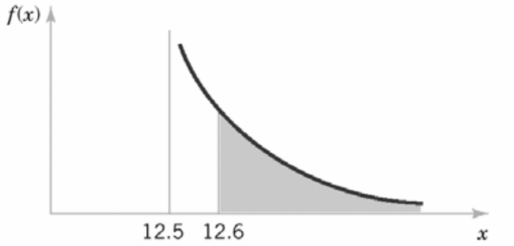
Distribuzione di probabilità uniforme




La variabile casuale $X$ può assumere in maniera equiprobabile un qualsiasi valore $x$ tra 0 e 20

## *Esempio di PDF*

Distribuzione di probabilità esponenziale




La variabile casuale $X$ può assumere solo valori > 12.5
e con una probabilità esponenziale decrescente



## *Funzione di Distribuzione Cumulativa*

$$F(x) \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u \quad = P\left(x \in ]-\infty, x]\right)$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Proprietà della cumulativa:

$F(x)$ è monotona non decrescente

$F(x)$>0 per ogni $x$

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$



## *Valor Medio*

Definizione:

Sia $X$ una variabile casuale continua con PDF $f(x)$.
Il **valor medio** o **valore atteso** di $X$, indicato con $\mu$ o $E(X)$, vale:

$$\mu \overset{\Delta}{=} E[X] \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\mathrm{d}x = E(X)$$



## *Varianza e Deviazione Standard*

Definizione:
Sia $X$ una variabile casuale continua con PDF $f(x)$.
La **varianza** di $X$, indicata con $\sigma^2$ o $V(X)$, vale:

$$\sigma^2 \overset{\Delta}{=} E\left[(x-\mu)^2\right] \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x - \mu^2 = V(X)$$

La **deviazione standard** $\sigma$ di $X$ vale $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(X)}$

## Distribuzione Normale o Gaussiana

Definizione:

Una variabile casuale $X$ con funzione di densità di probabilità

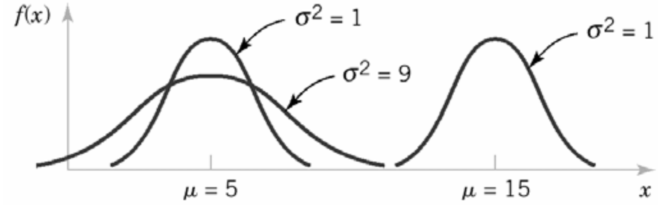
$$f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{per } -\infty < x < +\infty$$

Ha una **distribuzione normale** (ed è chiamata variabile casuale normale), con **parametri $\mu$ e $\sigma$**, dove $-\infty < \mu < +\infty$ e $\sigma > 0$.
Inoltre:

$E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$

17

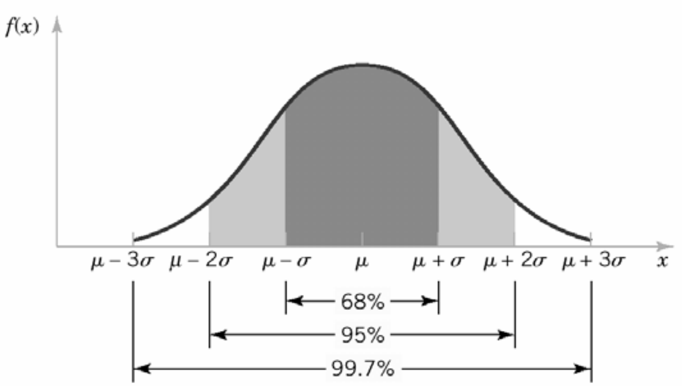
## Esempi di distribuzione normale




Grafici di funzioni densità di probabilità normale per diversi valori dei parametri $\mu$ e $\sigma^2$.
($\mu$ indica **"il centro"** e $\sigma$ **"la larghezza"** della curva a campana)

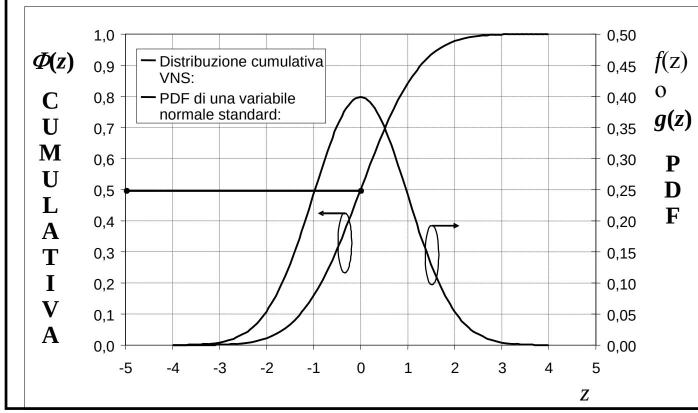
18

## Probabilità associate ad una distribuzione normale




19

## Grafici di g(z) e di Φ(z)




20