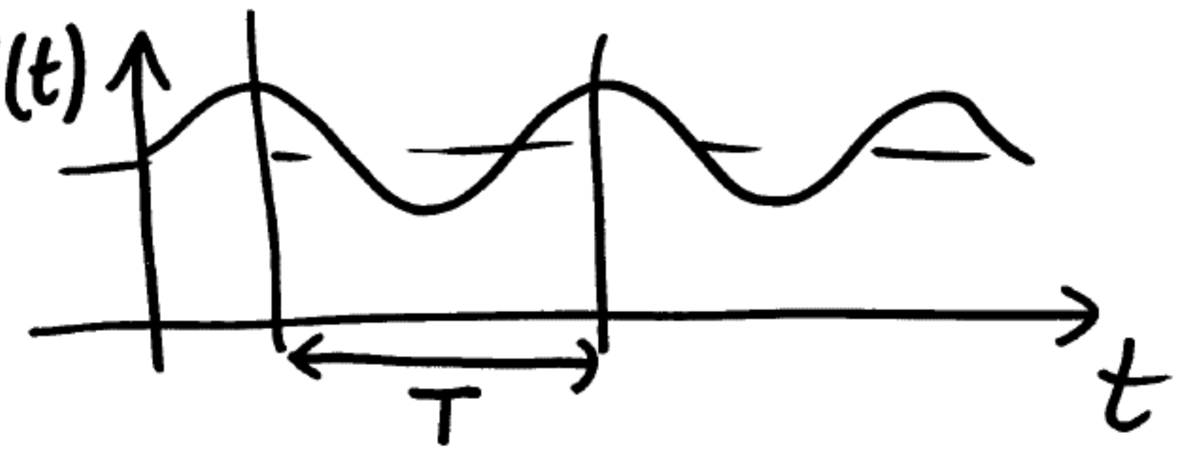
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI RISULTATI SPERIMENTALI

INTERPOLAZIONE E CURVE DI REGRESSIONE

Sistemi di Acquisizione Dati
Prof. Alessandro Pesatori

Rappresentazione grafica

- "Visione d'insieme" di una grandezza in funzione del tempo o di un altro parametro
- Tipicamente si utilizzano assi coordinati che devono riportare la descrizione della grandezza rappresentata e all'occorrenza anche la sua unità di misura



Tipi di Grafici

- Quando sugli assi compaiono dei valori numerici, bisogna sempre indicare l'unità di misura corrispondente. Il grafico si dice QUANTITATIVO

- Altrimenti il diagramma è QUALITATIVO
e può servire per indicare degli andamenti
o delle tendenze

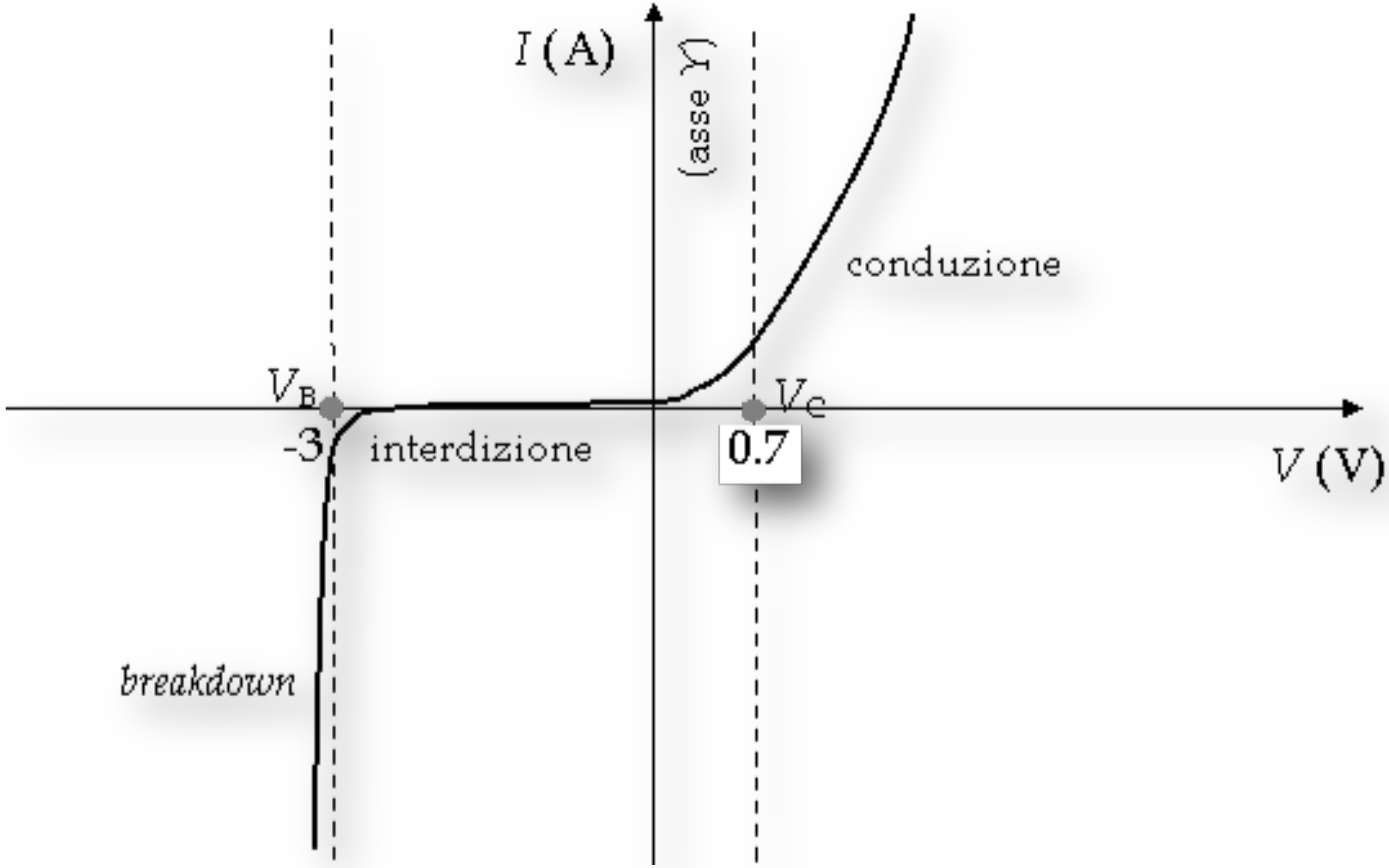
Grafico in un PIANO CARTESIANO

- ASCISSE (asse X): variabile indipendente
  o di comando o di ingresso
- ORDINATE (asse Y): variabile dipendente
  o grandezza di uscita

Tipicamente $u(xi) << u(yi)$, ossia la variabile di comando è nota con buona precisione (incertezza trascurabile) mentre la variabile di uscita presenta una maggiore incertezza

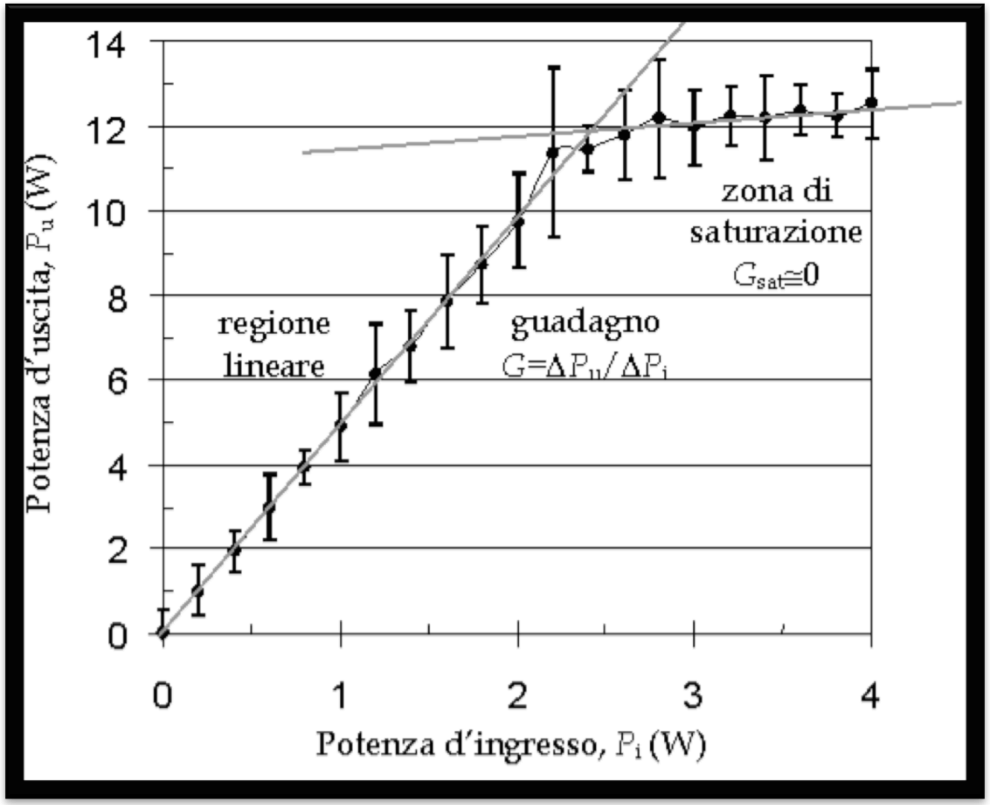
Molte volte le incertezze di ingressi e uscite non sono specificate ma insieme al rumore sui dati si traducono in una "dispersione dei punti sperimentali"

Caratteristica tensione corrente per un diodo Zener



Rappresentazione grafica della dispersione (incertezza): Barre di Errore

Caratteristica ingresso-uscita di un amplificatore elettronico.
Le barre di errore indicano un intervallo di confidenza, che va specificato: ad esempio $\pm 1\sigma$ (68%), oppure ad esempio il 90%.

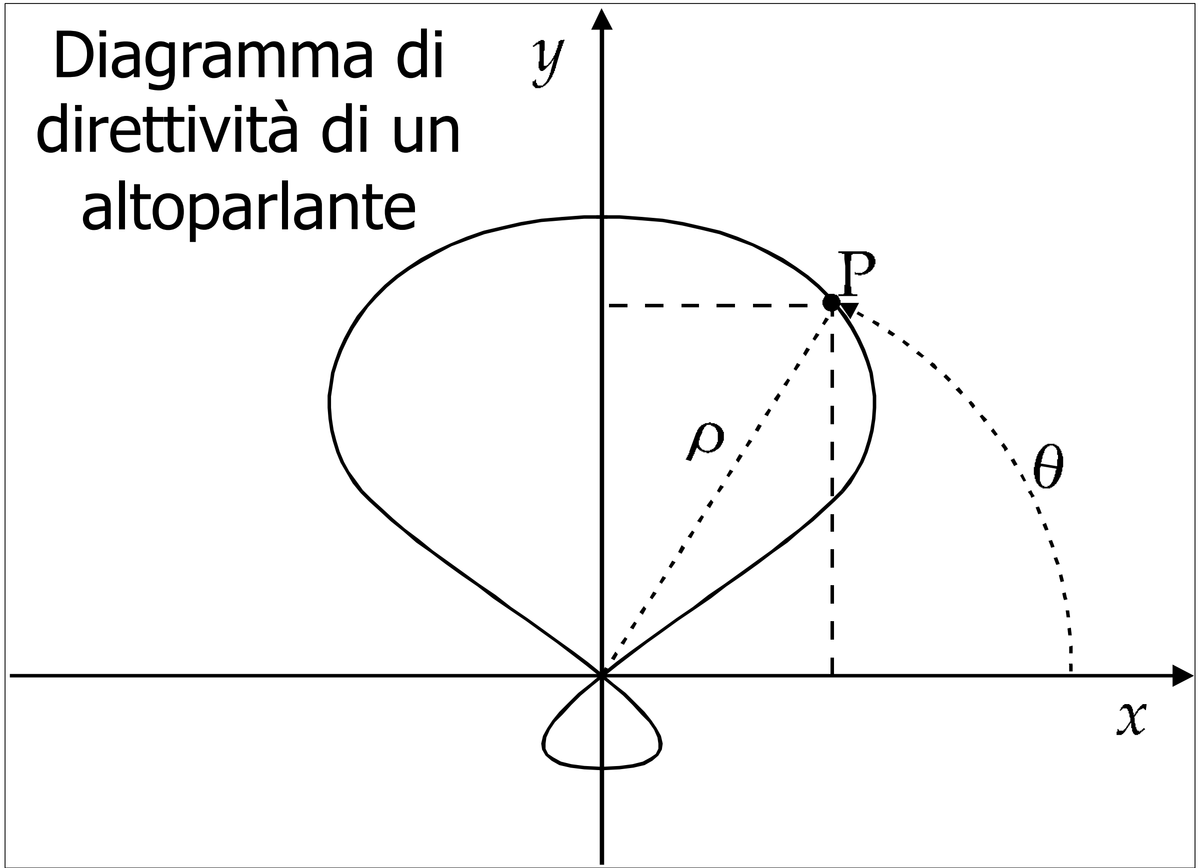


Diagrammi polari

Coordinata radiale: $\rho = (x^2+y^2)^{1/2}$

Coordinata angolare: $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$ per $x \geq 0$

Diagramma di direttività di un altoparlante



$x = \rho\cos(\theta)$

$y = \rho\sin(\theta)$

$\rho(\theta)$ può anche indicare la potenza irradiata da un' antenna

Scale logaritmiche

Utili per visualizzare grandezze che variano di diversi ordini di grandezza, con dettaglio relativo costante:

punti equispaziati in scala logaritmica stanno in uno stesso rapporto in scala lineare.

$\boldsymbol{z|_{\log}=\log_B(z/z_0)}$ B è la base e z_0 è il riferimento

Molto comuni dB e dBm (con B=10)

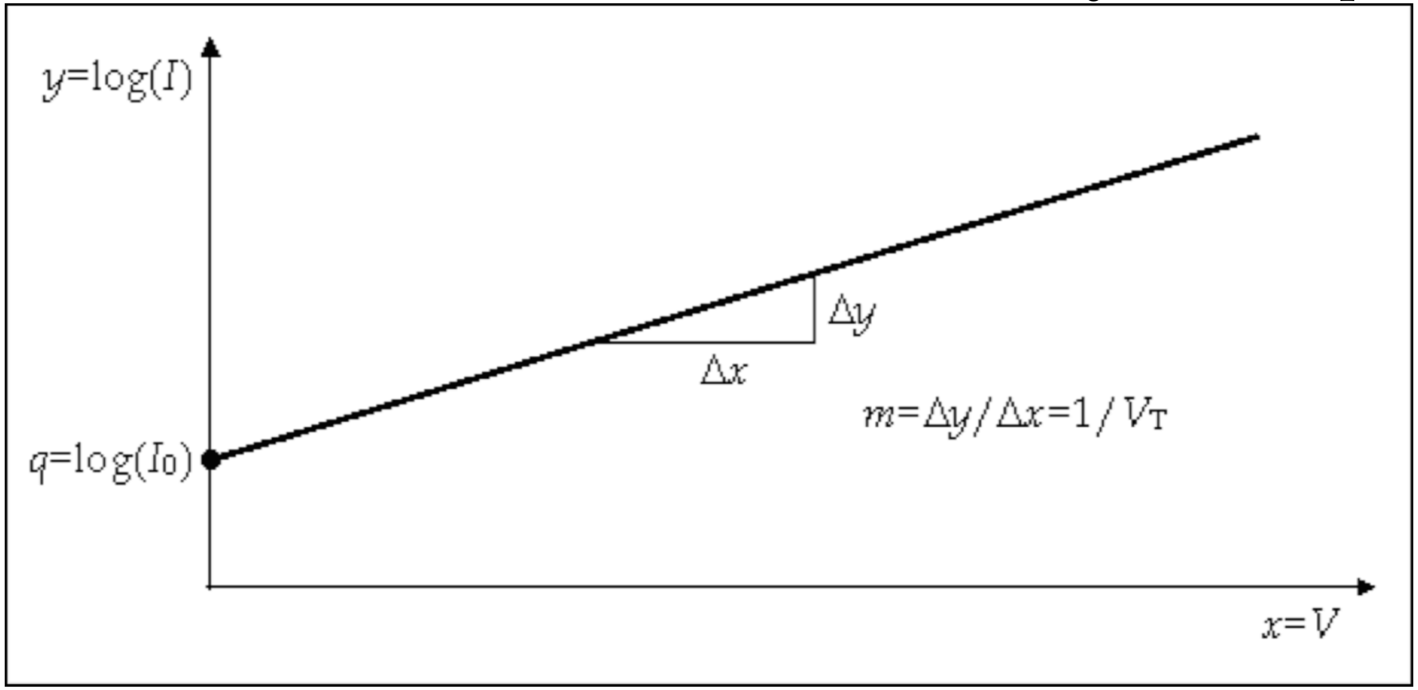
$P|_{\mathrm{dB}}=10\log_{10}(P/P_0)$

$A|_{\mathrm{dB}}=20\log_{10}(A/A_0)$

$P|_{\mathrm{dBm}}=10\log_{10}[P/(P_{\mathrm{m}})]$ con P_{m}=1 mW

Diagrammi Semilogaritmici (log-lin)

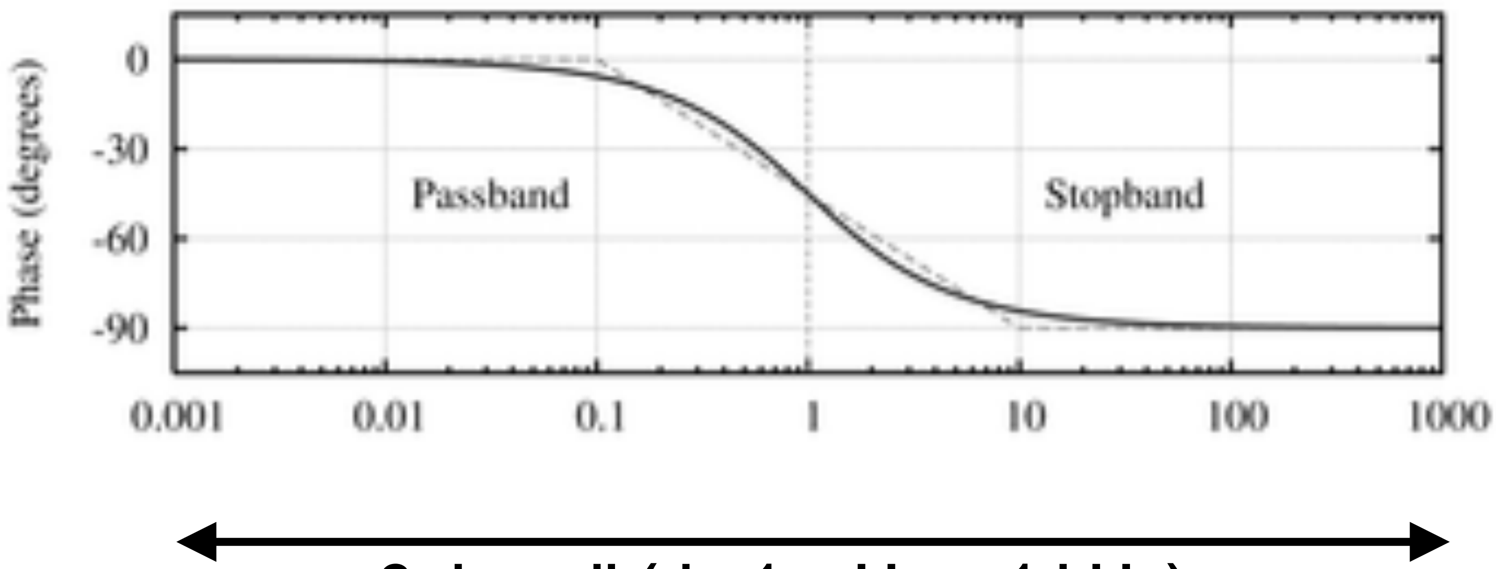
Diagramma semilog-*y* per la curva *I*-*V* di un diodo a semiconduttore in polarizzazione diretta: $\boldsymbol{I=I_0\exp(V/V_T)}$



$$y = \log(I) = (1/V_T)\times V + \log(I_0) = mx+q$$

$$m = (1/V_T) \qquad q=\log(I_0)$$

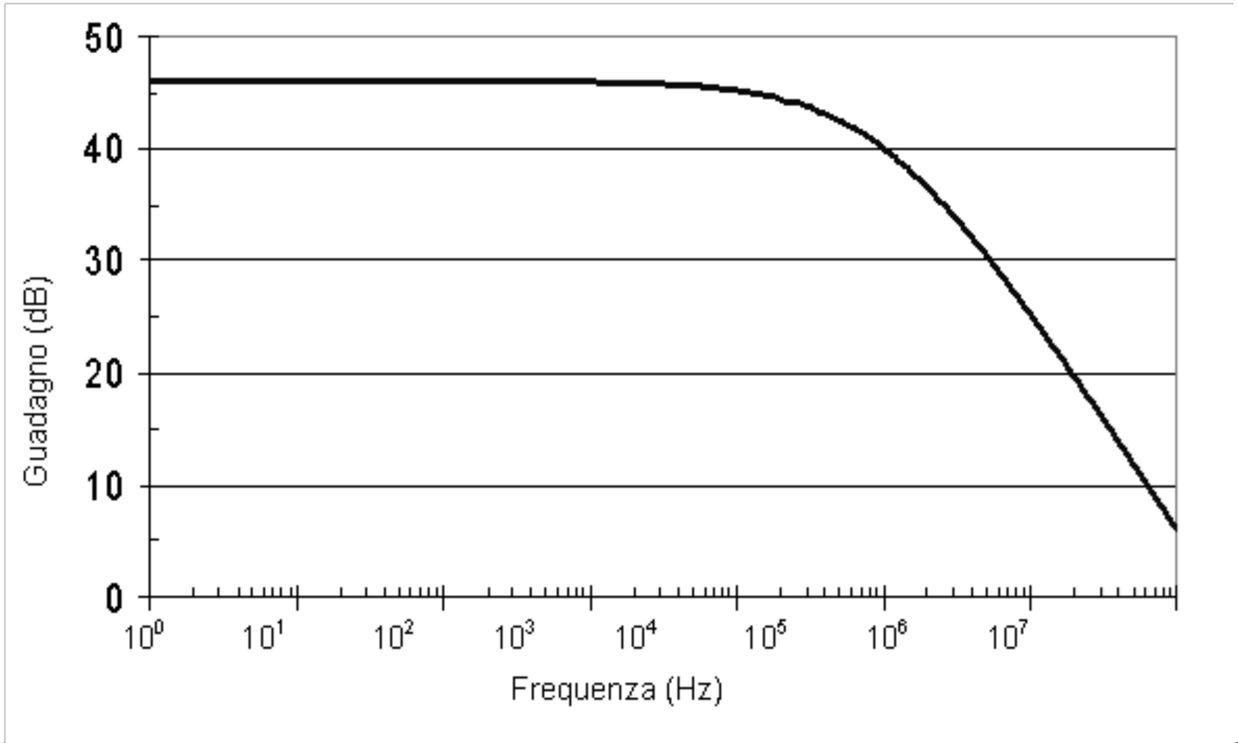
Diagrammi Semilogaritmici (lin-log): diagramma di Bode (della fase)



6 decadi (da 1 mHz a 1 kHz)

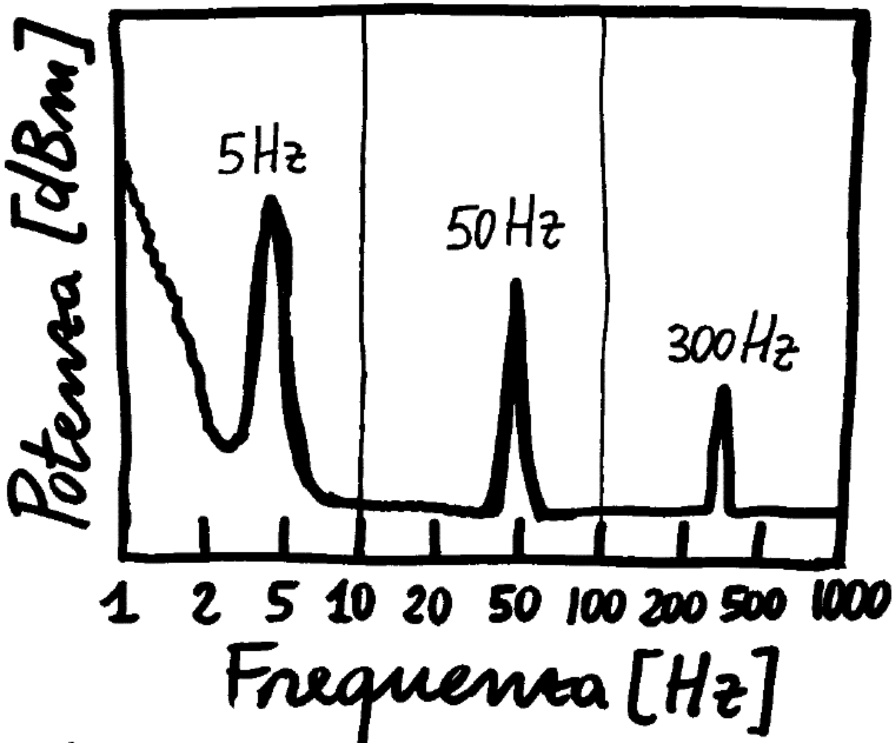
Sfasamento in gradi o radianti in funzione della frequenza riportata in scala logaritmica (ampia dinamica).

Diagrammi Bilogaritmici (log-log): diagramma di Bode (dell'ampiezza)



Ampiezza o guadagno in dB in funzione della frequenza riportata in scala logaritmica: si possono individuare delle pendenze tipiche (*e.g*. -20 dB/dec).

Diagrammi Bilogaritmici (log-log): spettro di potenza di un segnale



log-log

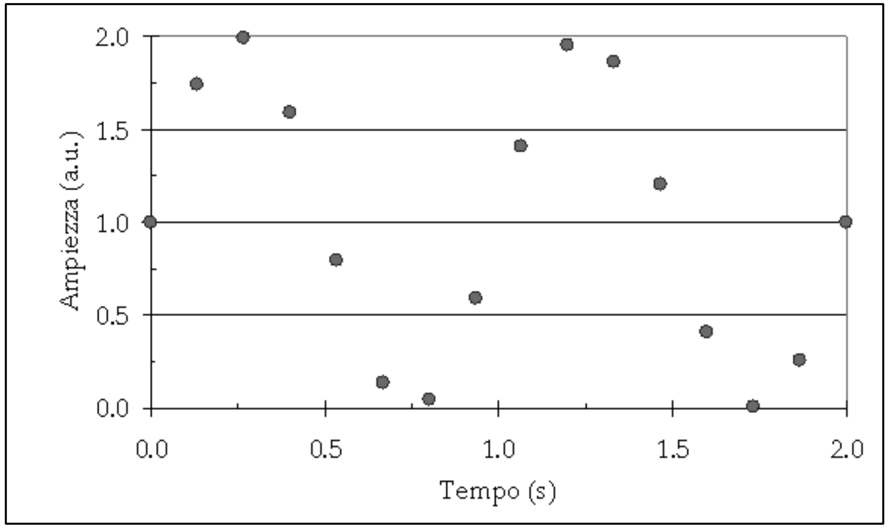
Ampia dinamica di frequenze e potenze visualizzabili sullo stesso diagramma.

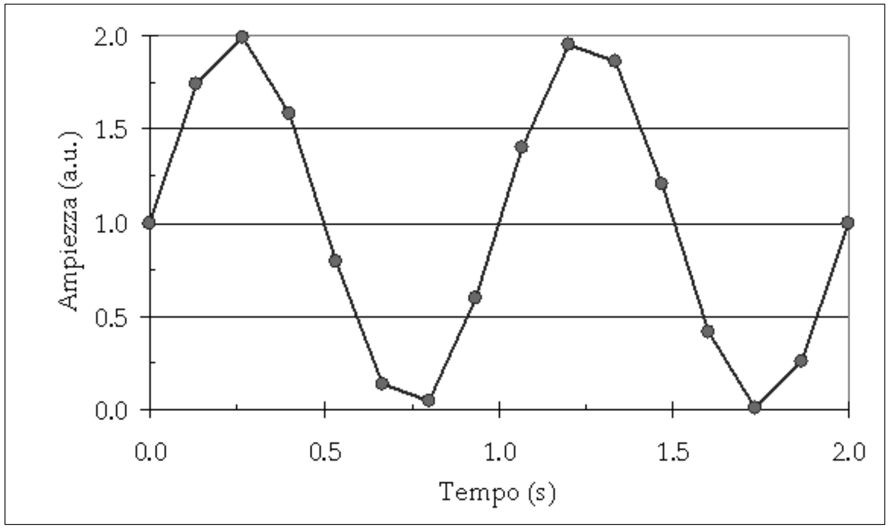
Interpolazione

- Misura: insieme finito e discreto di valori sperimentali.
- Questi punti sperimentali discreti sono tipicamente i valori assunti dal misurando al variare di uno o più parametri di comando (grandezza/e di ingresso). Oppure sono i campioni discreti prelevati nel tempo.
- La rappresentazione è più facilmente leggibile se operiamo un "riempimento" o **interpolazione tra due punti sperimentali adiacenti**.
- Interpolante: è una funzione continua, che passando per i due punti in questione ci fornisce l'andamento presunto (interpolato) della relazione ingresso-uscita.

Interpolazione lineare

È la più semplice interpolazione possibile: consiste nel congiungere i punti con una spezzata (insieme dei segmenti di rette che passano per due punti adiacenti).

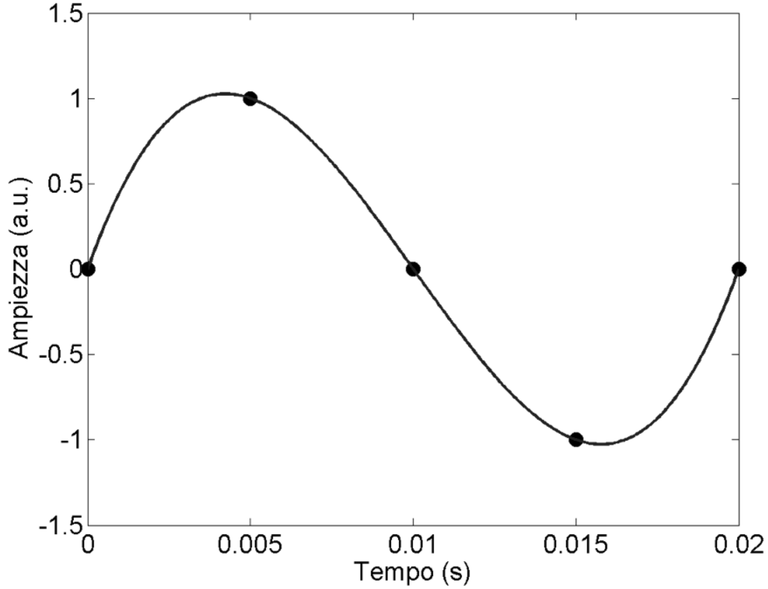


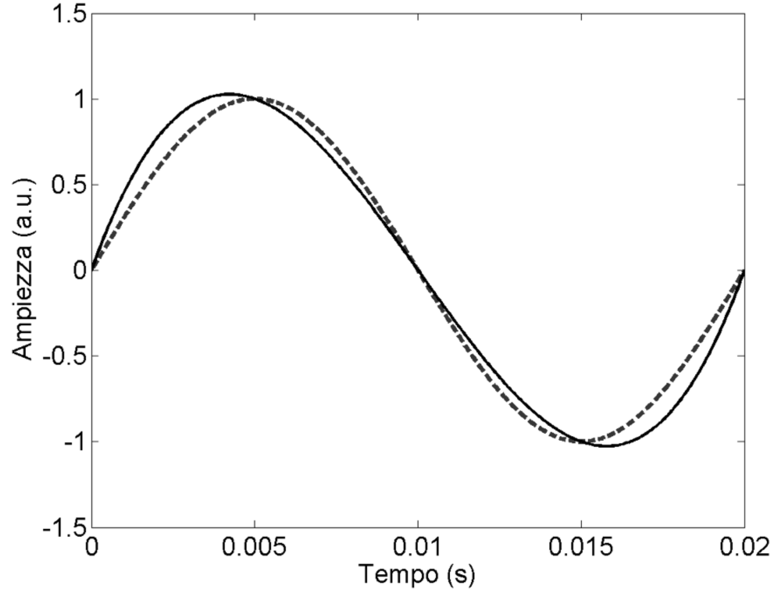


Non consente una buona ricostruzione del segnale perché non sfrutta l'informazione dei punti precedenti e successivi.

Interpolazione polinomiale cubica

È la curva che passa per i punti sperimentali, mantenendo continue la derivata prima e seconda.





Ha l'effetto visivo di una "linea smussata". Può essere ottenuta con differenti condizioni al contorno (nei due punti estremi dell'intervallo di dati disponibili).

Interpolazione polinomiale cubica

$$\boxed{S_i(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$$

Rappresenta la funzione *spline* che interpola la funzione S, le condizioni sono:

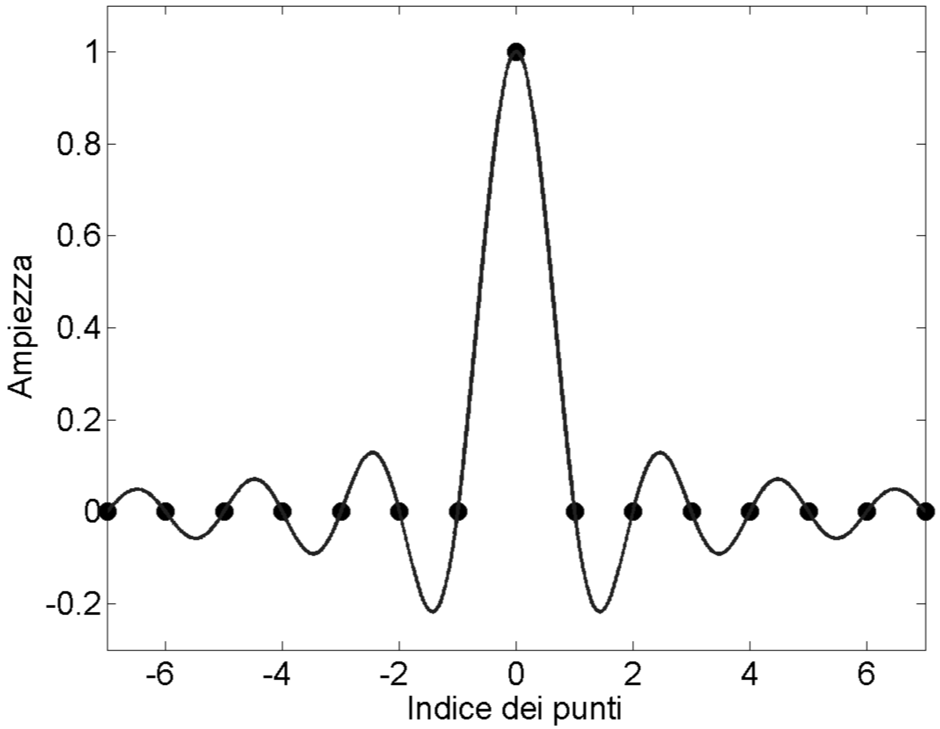
- La proprietà di interpolazione , $S(x_i)=f(x_i)$
- La continuità delle spline, $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$, $i = 1,\ldots,n-1$
- La Continuità delle derivate, $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ and $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$, $i = 1,\ldots,n-1$.

Per n polinomi di terzo grado che formano S (lavoriamo quindi su n+1 punti), abbiamo bisogno di 4n condizioni (per ogni polinomio di grado tre ci sono 4 condizioni). Sebbene la proprietà d'interpolazione ci dà $n + 1$ condizioni, le condizioni di continuità ci danno $n + 1 - 2 = n - 1$ condizioni, e otteniamo $4n - 2$ condizioni.
Abbiamo bisogno di altre 2 condizioni che possono essere di questo tipo:

$S(x_i)'=cost$ e $S(x_n)'=$cost (spline vincolate)

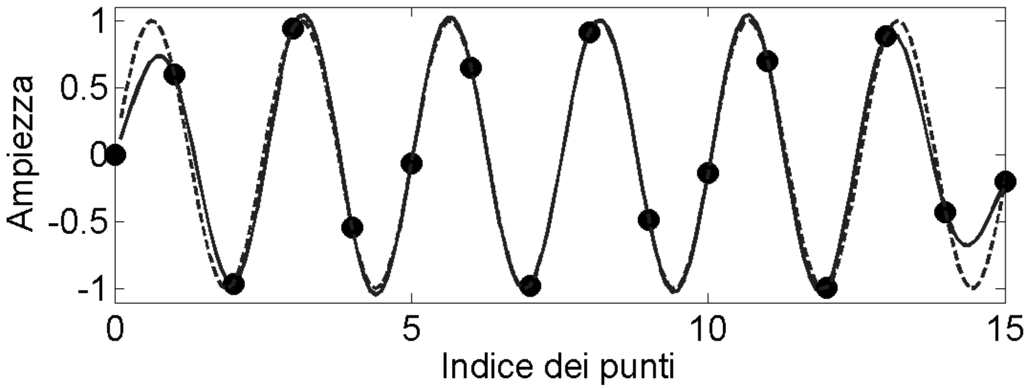
Interpolazione a seno cardinale

- Utilizzata per la ricostruzione di segnali campionati nel tempo.
- Si ricava matematicamente dall'operazione di filtraggio passa-basso ideale del segnale campionato.
- Nel dominio del tempo consiste in una convoluzione del segnale campionato con la funzione sinc(x)=sin(x)/x

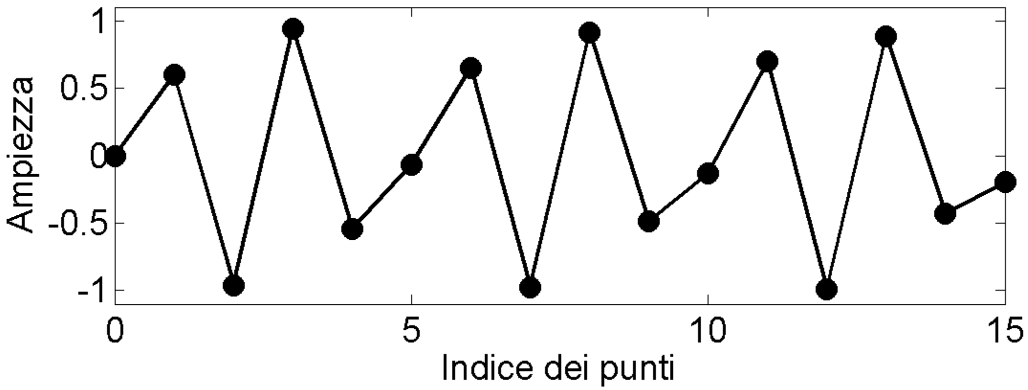


Esempio di ricostruzione di un segnale mediante interpolatore

Sinusoide campionata a 2.51 punti per periodo



Interpolatore sinc(x)



Interpolatore lineare

Regressione di più punti sperimentali

- Un **diagramma sperimentale**, ottenuto da risultati di misura, spesso mostra una dipendenza $y = f(x)$ che appare ragionevolmente approssimabile con una **funzione nota**
- Alternativamente, da un'**analisi teorica**, possiamo conoscere quale tipo di **relazione matematica** dovrebbe essere rappresentata dai punti, ma la dispersione dei dati è talmente grande (*e.g.* per la presenza di rumore) che non riusciamo a definire con sufficiente affidabilità i **valori dei parametri**

- Come è possibile **ricavare questi valori (parametri caratteristici del fenomeno misurato) da una** misura/**osservazione di più punti?**

Regressione ai minimi quadrati (LS)

- Consideriamo una generica dipendenza di una variabile fisica y da un'altra variabile x, attraverso una funzione f con più parametri A,B, … : $y = f(A,B,\ldots x)$
- Effettuiamo quindi n misure y_i della variabile y in funzione della variabile x osservata nei punti x_i
- Per stimare i parametri che meglio rappresentano la realtà misurata, definiamo una funzione "distanza" tra la misura e la funzione f. Si vuole minimizzare tale distanza
- La funzione "distanza" più comunemente usata è la somma degli scarti quadratici tra f e il valore misurato
- Scarto: $\delta_i = y_i - f(x_i)$
- Funzione "distanza" da minimizzare: $\boxed{\Phi = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2}$

Regressione lineare LS (1/2)

Un importante caso di regressione, semplice da risolvere analiticamente, è quello della regressione lineare:

Consideriamo una dipendenza lineare $y = m\ x + b$ di cui si vogliono ricavare i due parametri m e b.

Per il punto i-esimo di misura, lo scarto δ_i tra il valore empirico, y_i, e quello della curva di regressione, $f(x_i)$, vale

$$\delta_i = y_i - [\ m\ x_i + b\ ]$$

Dobbiamo trovare i **valori dei parametri (*m* e *b*) per i quali è minima la "distanza"**

$$\boxed{\Phi(m,b) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(mx_i + b\right)\right]^2}$$

Regressione lineare LS (2/2)

Per trovare il minimo di Φ, annulliamo le due derivate prime parziali rispetto a *m* e *b* :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m} = 0 \Rightarrow \left(m \sum x_i^2 \right) + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \Rightarrow \left(m \sum x_i \right) + nb = \sum y_i$$

dove tutte le sommatorie sono ovviamente estese per i che va da 1 fino a n.

Si è ottenuto un sistema lineare di due equazioni in due incognite, m e b appunto.

Regressione lineare: calcolo di *m* e *b*

La soluzione del sistema (che si ottiene facilmente per sostituzione) è:

$$\boxed{m = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}}$$

$$\boxed{b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{\sum y_i - m\sum x_i}{n} = \overline{y} - m\overline{x}}$$

Questa soluzione corrisponde a un minimo (lo si può dimostrare matematicamente facendo le derivate seconde, entrambe >0, oppure ripensando al significato della funzione "distanza", intrinsecamente positiva e che cresce allontanandosi dai punti acquisiti...)

Esercizio su retta di regressione (1/2)

n(=5) misure di $y=f(x)$ con punti sperimentali

i	1	2	3	4	5
x_i =	[0	1	2	3	4]
y_i =	[1	2	2	2	3]

x_i	y_i
0	1
1	2
2	2
3	2
4	3

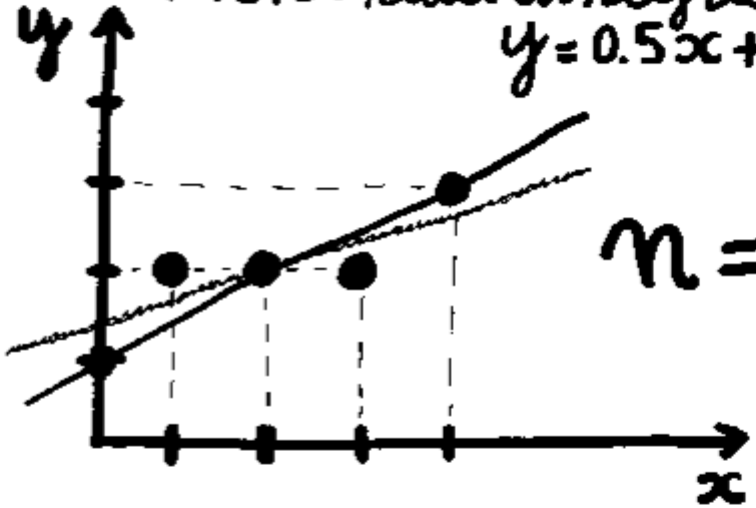
Modello lineare $\boldsymbol{\delta_i = y_i - [\, m\, x_i + b\,]}$

Regressione ai minimi quadrati → $\sum(\delta_i)^2$="min."

$$m = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \quad b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{\sum y_i - m\sum x_i}{n} = \overline{y} - m\overline{x}$$

Esercizio su retta di regressione (2/2)

ESERCIZIO: retta di regressione



$n = 5$

x_i	y_i
0	1
1	2
2	2
3	2
4	3

Modello: $y = mx + b$ retta di regr.

$$m = \frac{5(0+2+4+6+12) - 10 \times 10}{5(0+1+4+9+16) - (10)^2} = \frac{20}{50} = 0.4$$

$$b = \frac{10 - 0.4 \times 10}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$$