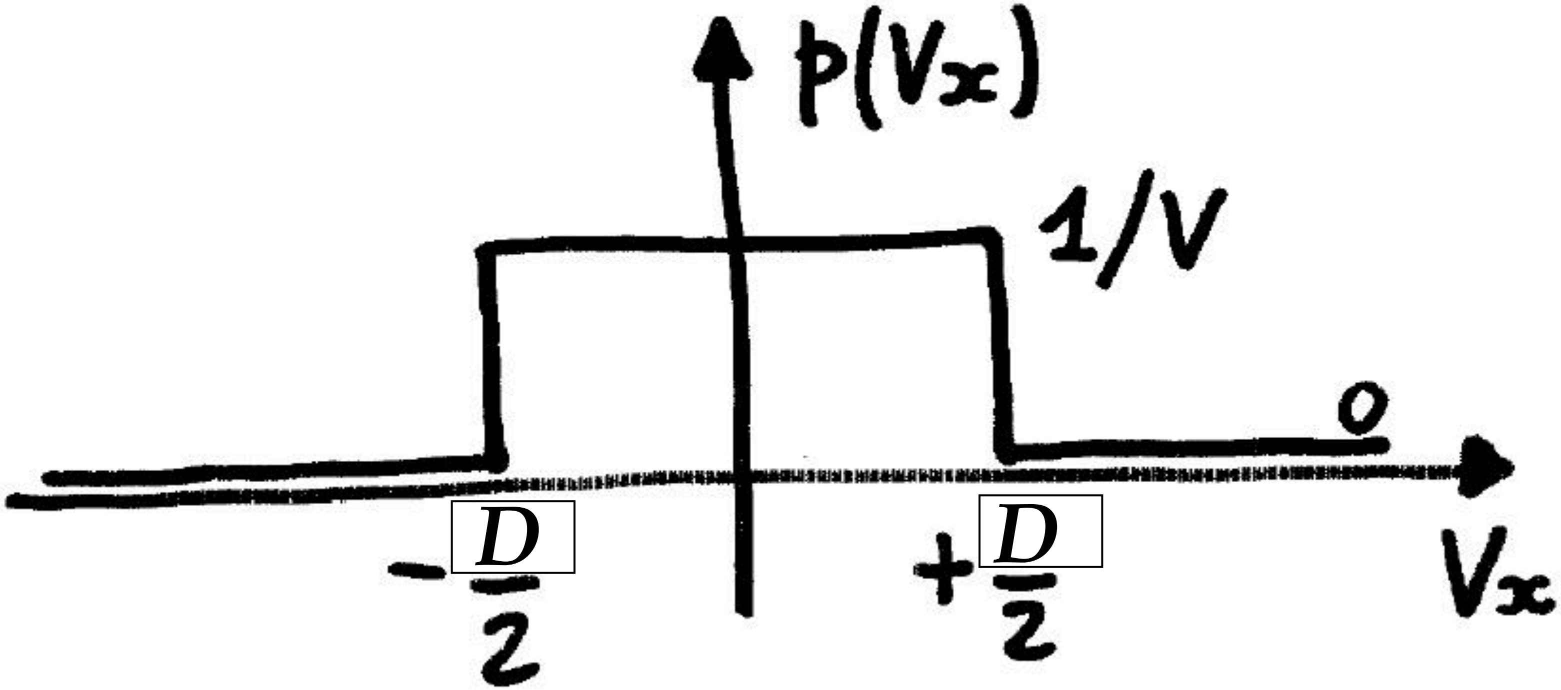
Bit equivalenti

Bit equivalenti (1/7)

segnale $s(t) = V_x \in [-D/2, +D/2]$



La dinamica di variazione del segnale è $D=\pm D/2$ $\Rightarrow$ $\sigma_s^2 = \dfrac{D^2}{12}$

Bit equivalenti (2/7)

Disponendo di un convertitore/voltmetro che quantizza il segnale $s(t)$ su n bit, si avrà un

PASSO DI QUANTIZZAZIONE $Q = \Delta V = \dfrac{D}{2^n}$

[***D* è la dinamica** del voltmetro] e dunque si ha una varianza ("incertezza di quantizzazione")

$$\sigma_q^2 = \frac{Q^2}{12} = \frac{1}{12}\left(\frac{D}{2^n}\right)^2 = \frac{\sigma_s^2}{2^{2n}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2} = \text{costante} = 2^{2n} = \frac{S}{N}$$

Per un quantizzatore ideale

Bit equivalenti (3 / 7)

In un convertitore <u>ideale</u>

$$n = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2}\right)$$

$$S = \sigma_s^2$$

$$N = N_q = \sigma_q^2$$

$$\rightarrow \boxed{n = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{S}{N_q}\right) \quad \textbf{caso “ideale”}}$$

In un convertitore <u>reale</u>

$$N = N_q + \underbrace{N_{A/D} + N_{ext}}_{\text{rumore aggiunto}} > N_q$$

$$\sigma_c^2 = \sigma_q^2 + \underbrace{\sigma_{n,A/D}^2}_{\text{convertitore reale}} + \underbrace{\sigma_{n,ext}^2}_{\text{rumore esterno}} > \sigma_q^2$$

Bit equivalenti (4 / 7)

Si definisce il **numero di bit equivalenti** come

$$n_\mathrm{e} \equiv \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_\mathrm{s}^2}{\sigma_\mathrm{c}^2}\right) < n \quad \rightarrow \quad \boxed{n_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{S}{N}\right) \quad \textbf{caso reale}}$$

rumore del convertitore

$$n_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_\mathrm{s}^2}{\sigma_\mathrm{q}^2}\frac{\sigma_\mathrm{q}^2}{\sigma_\mathrm{c}^2}\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_\mathrm{s}^2}{\sigma_\mathrm{q}^2}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_\mathrm{q}^2}{\sigma_\mathrm{c}^2}\right) =$$

$$= n - \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_\mathrm{c}^2}{\sigma_\mathrm{q}^2}\right) = n - \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\overbrace{\sigma_\mathrm{n,A/D}^2 + \sigma_\mathrm{n,ext}^2}^{\text{rumore aggiunto}}}{\sigma_\mathrm{q}^2}\right)$$

Bit equivalenti (5/7)

$$\frac{\overbrace{\sigma^2_{\mathrm{n,A/D}} + \sigma^2_{\mathrm{n,ext}}}^{\sigma_{\mathrm{n}}^2 \text{ rum. aggiunto}}}{\sigma^2_{\mathrm{q}}} = 2^{2n}\,\frac{N}{S}$$

rumore aggiunto

essendo $\sigma^2_{\mathrm{q}} = \dfrac{\sigma^2_{\mathrm{s}}}{2^{2n}}$

Esistono allora due condizioni limite

"alto" $\quad \dfrac{S}{N} >> 2^{2n} \qquad n_{\mathrm{e}} \cong n$

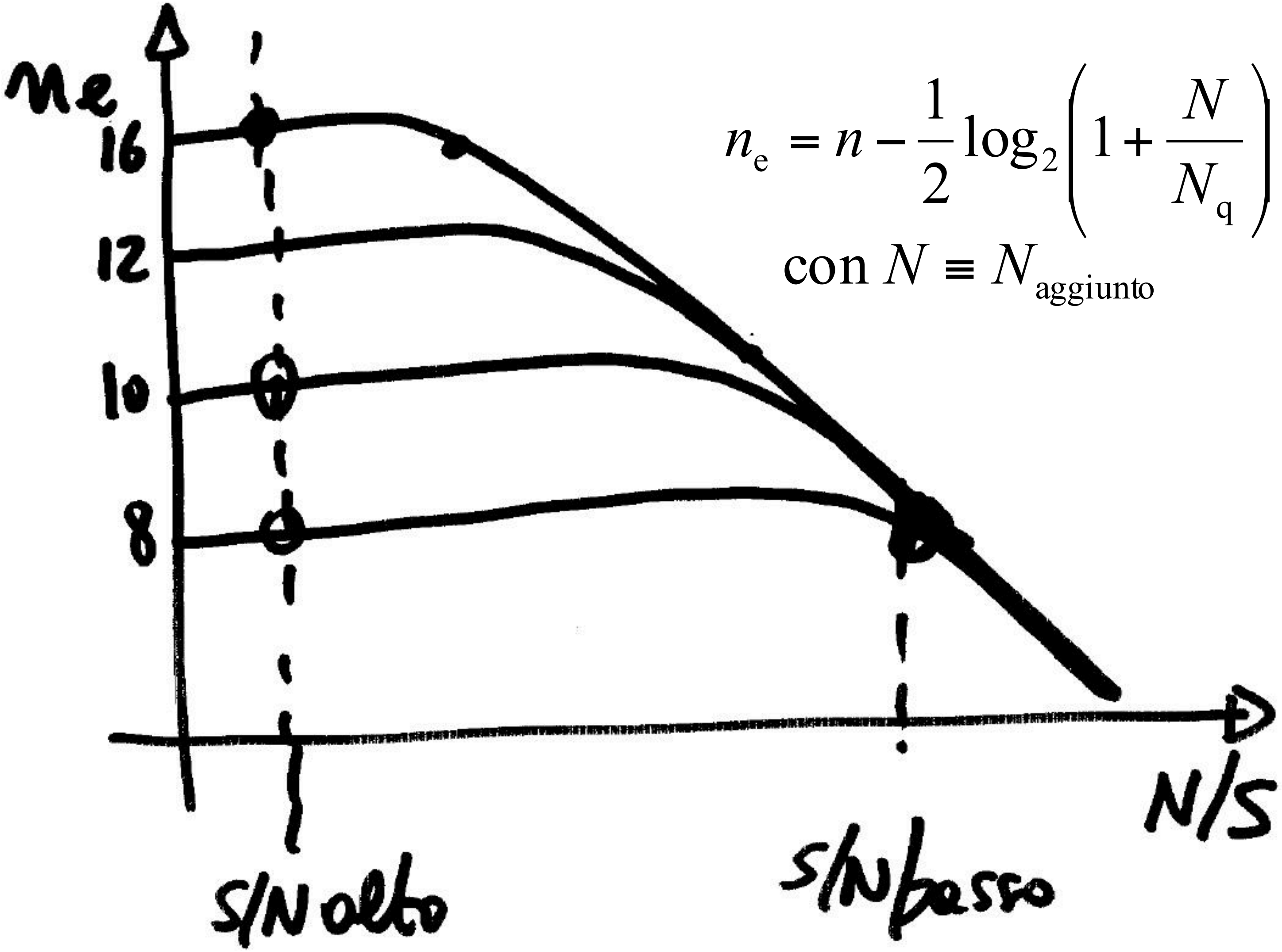
"basso" $\quad \dfrac{S}{N} << 2^{2n}$

$$n_{\mathrm{e}} \cong n - \frac{1}{2}\log_2\left(2^{2n}\right) - \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma^2_{\mathrm{n}}}{\sigma^2_{s}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma^2_{\mathrm{s}}}{\sigma^2_{\mathrm{n}}}\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{S}{N}\right)$$

Si perde 1 bit per ogni calo di S/N di -6 dB (fattore 4)

Bit equivalenti (6/7)



$$n_e = n - \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{N}{N_q}\right)$$

$$\text{con } N \equiv N_{\text{aggiunto}}$$

Bit equivalenti (7/7)

Perdendo un fattore 4 = 6 dB in S/N si perde 1 bit.
Per ogni fattore 2 = 3 dB, sempre perso in S/N, si perde invece ½ bit.

Se anziché perdere in S/N si guadagna in S/N (S/N aumenta), allora si guadagnano gli stessi incrementi in bit equivalenti (**+0.5 bit ogni ×2 in S/N**)

Esercizio: in zona di S/N "basso", si passa da $(S/N)_1$ a $(S/N)_2$ e si perdono 30 dB. Come calano i bit equivalenti?

$$\text{se} \quad \frac{(S/N)_2}{(S/N)_1} = -30\ \text{dB} = \frac{1}{1000}$$

$$n_{e,1} = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{S}{N}\right)_1 \qquad\qquad n_{e,2} = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{S}{N}\right)_2$$

$$n_{e,2} = n_{e,1} + \frac{1}{2}\log_2\frac{(S/N)_2}{(S/N)_1} = n_{e,1} - \frac{10}{2} = n_{e,1} - 5\ \text{bit}$$