Variabili Casuali e Distribuzioni di Probabilità

3

Random Variables and Probability Distributions

CHAPTER OUTLINE

Modellizzazione di un sistema fisico

ESPERIMENTI E MISURE

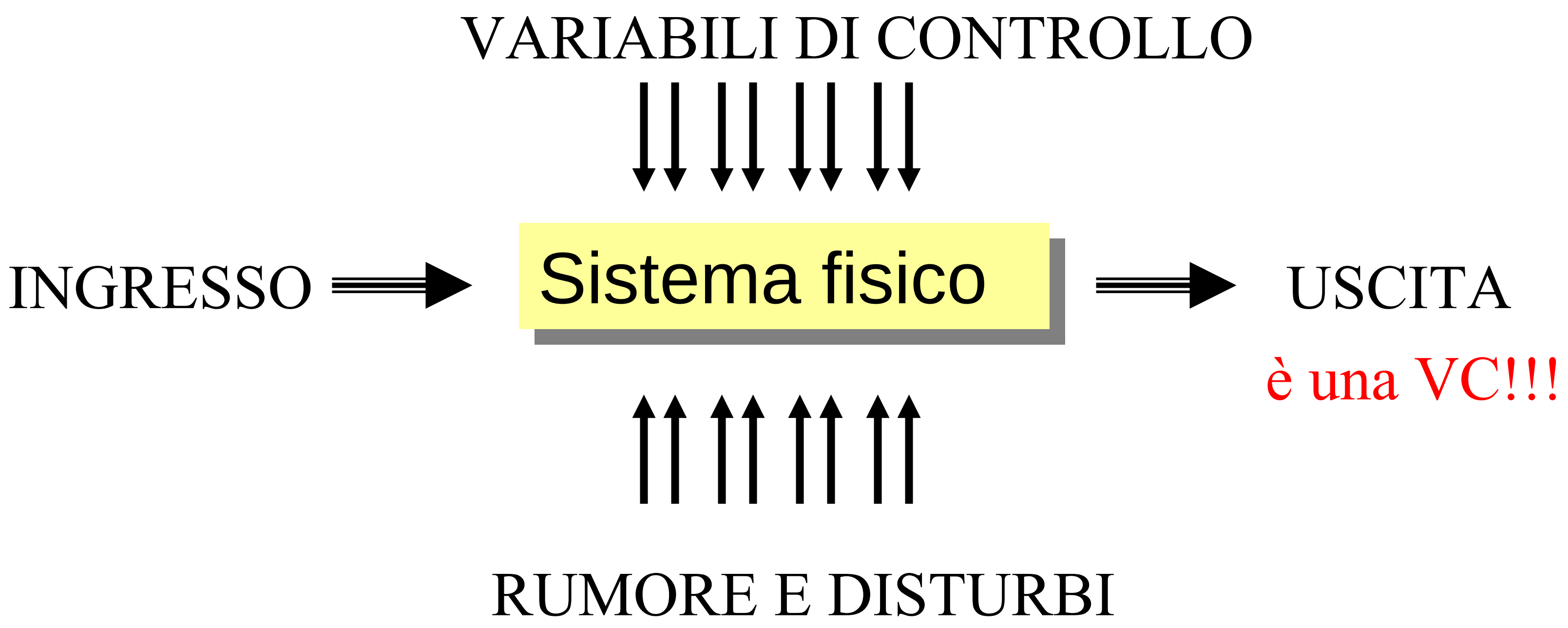
ANALISI

Il **modello** serve a **descrivere analiticamente** il **sistema fisico** studiato (noto/conoscibile attraverso le **misure**)

Di solito, per ottenere informazioni/conoscenze sul sistema
si fanno esperimenti/misure
il cui **risultato è sempre una <u>Variabile Casuale (VC)</u>**

Sistema fisico da misurare

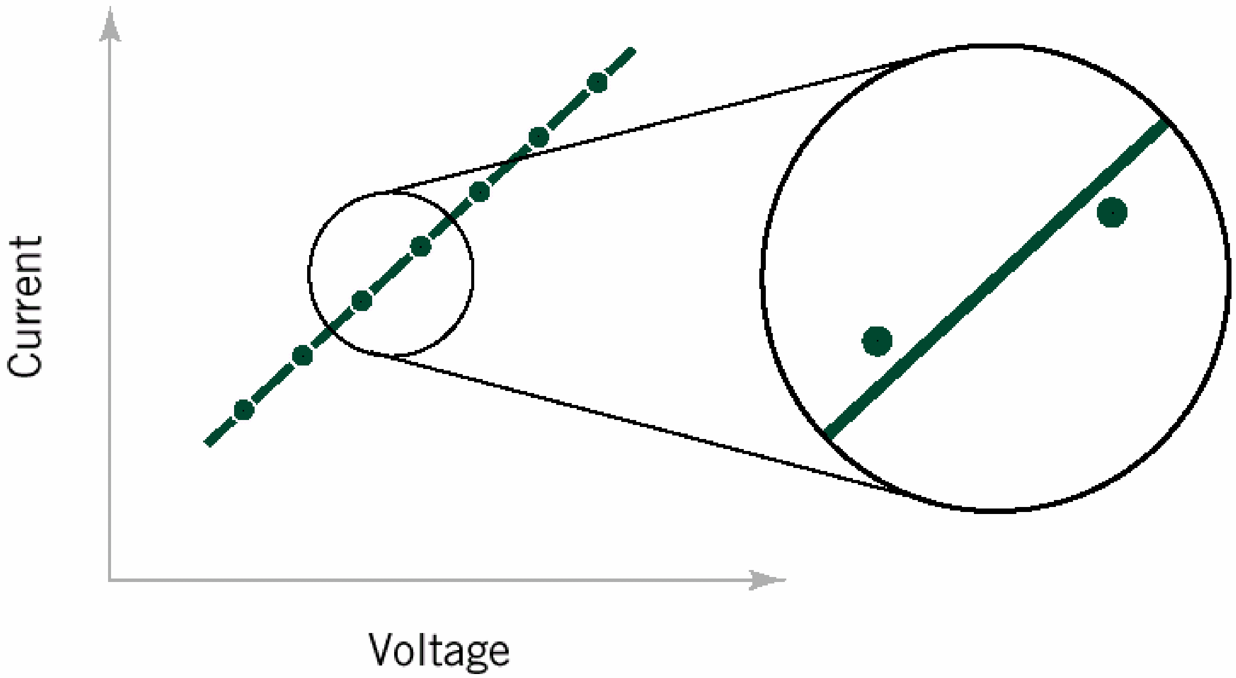
Per conoscere un sistema fisico, e trarne un modello,
occorre fare degli esperimenti e delle misure



Sul sistema fisico agiscono **diversi "INGRESSI"**:
propri del sistema; rumore; controllati dall'operatore; ...
sono tutte delle Variabili Casuali!!!

Ogni misura è affetta da variabilità o incertezza

Se è vero che le **misure ci danno conoscenza**,
è anche vero che **nessuna misura è "esatta"**



Caratteristica Tensione-Corrente (X-Y) di un conduttore

La dispersione dei dati è trattabile come una VC!!!

VARIABILI CASUALI

Definizione:

Una **variabile casuale** X è una variabile numerica, spesso reale (es. valore di una misura), il cui valore osservato può cambiare ripetendo lo stesso esperimento (es. misurazione)

X può essere una **variabile continua** o **discreta**

VARIABILI CASUALI

Esempi di variabili **continue**:
Il tempo, lo spazio, l'energia, la temperatura, la pressione, la corrente elettrica…

*Tutte le grandezze che possono essere messe in corrispondenza con il campo dei **numeri reali** (attraverso un'opportuna unità di misura)*

Esempi di variabili **discrete**:
Numero di giornate piovose, numero di pezzi difettosi in un lotto di produzione, pagine di un libro, numero di accessi a un *server*…

*Tutte le grandezze che possono essere messe in corrispondenza con il campo dei **numeri interi** (attraverso un'opportuna "unità di misura")*

PROBABILITÀ

La **probabilità** è utilizzata per **quantificare numericamente la possibilità che un dato evento si realizzi**.

Ad esempio, per **stabilire se è più o meno facile** che una misura fornisca un valore all'interno di un determinato intervallo.

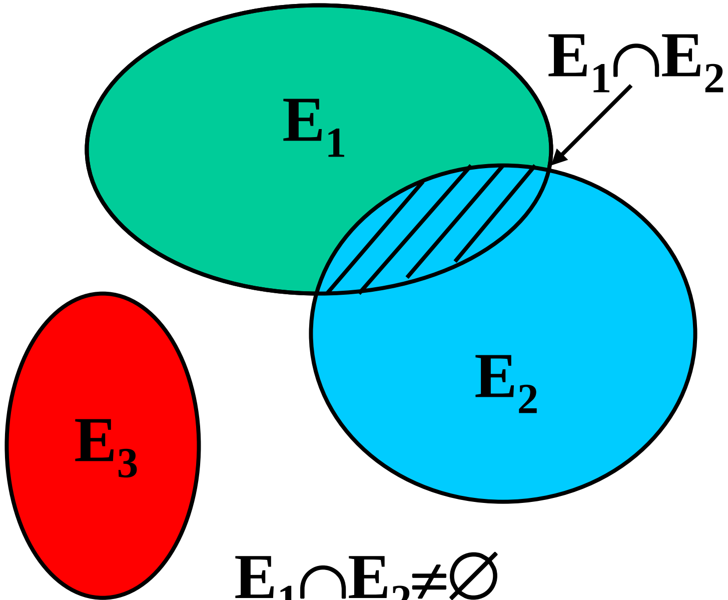
Può essere interpretata come il **grado di fiducia** che un evento si realizzi, o come la sua **frequenza relativa di realizzazione**.

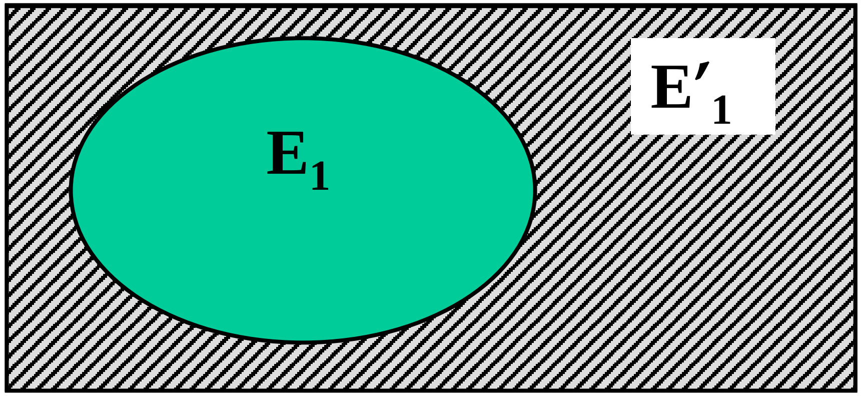
La probabilità è quantificata assegnando un ***numero tra 0 e 1*** *(0% e 100%)*
Più è alto il numero più l'evento è probabile:

0 = evento impossibile

1 = evento certo

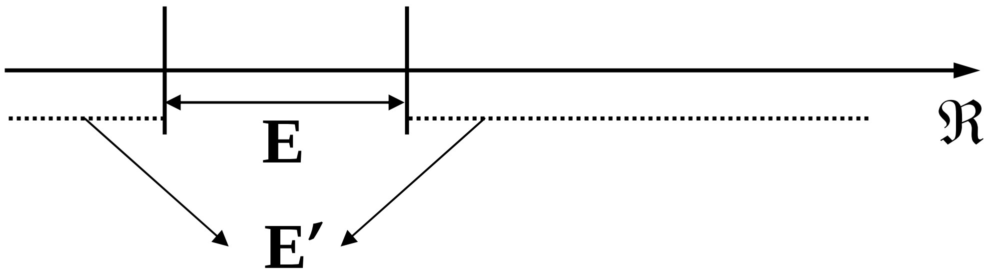
Insiemi e intervalli di valori (sull’asse reale)





$E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$
$E_1 \cap E_3 = \varnothing$
$E_2 \cap E_3 = \varnothing$

E'_1 è il complemento a E_1
o insieme complementare
U (o $\Re$ è l’insieme universo)



E_1 ed E_2 presentano una intersezione non nulla (insiemi congiunti)
E_1 ed E_3, come pure E_2 ed E_3, sono insiemi disgiunti

Proprietà della funzione Probabilità

Se X è una variabile casuale di tipo reale

1. $P(X \in \Re) = 1$, dove $\Re$ è l'insieme dei numeri reali

2. $0 \le P(X \in E) \le 1$ per qualunque insieme E di valori (con $E \in \Re$)

3. Se $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sono insiemi mutuamente esclusivi, allora

   $P(X \in E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k) = P(X \in E_1) + P(X \in E_2) + \ldots + P(X \in E_k)$

   La probabilità dell'unione di più insiemi disgiunti
   è la somma delle probabilità dei singoli insiemi

Mutuamente esclusivi (o disgiunti) $\equiv$ insieme intersezione vuoto

Significato delle proprietà della Probabilità

1. Mostra che il massimo valore di una probabilità è 1
2. Implica che una probabilità non può essere negativa (né >1)
3. Può essere utilizzata per mettere in relazione la probabilità di un insieme *E* e del suo complementare *E'* (insieme degli elementi che non appartengono ad *E*):

$$E \cup E' = \Re \,, \quad 1 = P(X \in \Re) = P(X \in E \cup E') = P(X \in E) + P(X \in E')$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X \in E') = 1 - P(X \in E)}$$

e viceversa $P(X \in E) = 1 - P(X \in E')$

Esempio di calcolo di probabilità (1/3)

Tempo di vita X, in ore, di lampade fluorescenti (a tubo).

Dati:

$P(X \leq 5000) = 0.1$	$\rightarrow$ E1
$P(5000 < X \leq 6000) = 0.3$	$\rightarrow$ E2
$P(X > 8000) = 0.4$	$\rightarrow$ E3

Ricavare:

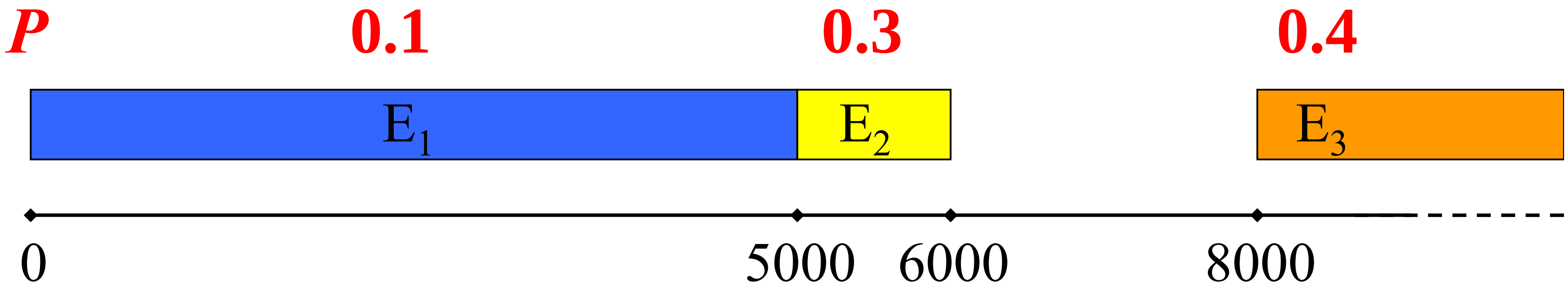
$P(X \leq 6000) = ?$

$P(X > 6000) = ?$

$P(6000 < X \leq 8000) = ?$

$P(X \leq 5500) = ?$

Esempio di calcolo di probabilità (2/3)



$$P(X \leq 6000) = P(X \leq 5000) + P(5000 < X \leq 6000) =$$
$$= 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X > 6000) = 1 - P(X \leq 6000) = 1 - 0.4 = 0.6$$

è il complementare di quanto prima calcolato

Esempio di calcolo di probabilità (3/3)

$$P(6000 < X \leq 8000) = 1 - [P(X \leq 5000) +$$
$$+ P(5000 < X \leq 6000) + P(X > 8000)\ ] =$$
$$= 1 - [0.1 + 0.3 + 0.4] = 0.2$$

$$P(X \leq 5500) = ?$$

$$P(X \leq 5500) \leq P(X \leq 6000) = 0.4$$
$$P(X \leq 5500) \geq P(X \leq 5000) = 0.1$$
$$\Rightarrow 0.1 \leq P(X \leq 5500) \leq 0.4$$

Eventi

Il concetto di probabilità non è applicabile solo a insiemi di numeri, ma anche ad eventi: non sempre il valore misurato è ottenuto da un esperimento.

Gli eventi si possono classificare in categorie ed essere trattati esattamente allo stesso modo degli insiemi di numeri reali.

Esempio di eventi: estraggo delle viti da un sacchetto e queste possono avere lunghezza differente: as es. E_1 t.c. $0<L\leq 1$cm
E_2 t.c. $1\text{cm}<L\leq 5$cm; E_3 t.c. $5\text{cm}<L\leq 10$cm; E_4 t.c. $L>10$cm

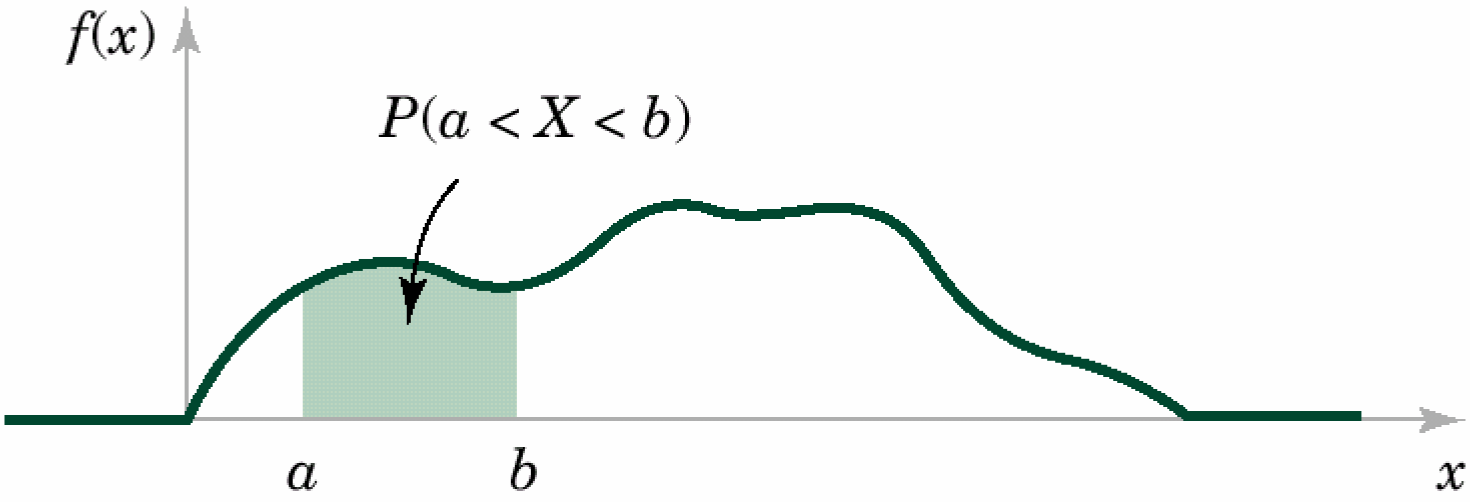
Oppure: scelgo un aereo a caso dalla flotta della AirFrance e questo è un Boeing 737 o un 747 o un DC9

VARIABILI CASUALI CONTINUE

Funzione Densità di Probabilità (PDF)

La **funzione densità di probabilità** $\boldsymbol{f(x)}$ di una variabile casuale continua X è utilizzata per determinare la **probabilità che $\boldsymbol{X}$ appartenga a un dato intervallo**:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Proprietà della PDF

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = P(-\infty < X < +\infty) \equiv 1$$ AREA UNITARIA della PDF

***f*(*x*)** è usata **per "calcolare aree" e non valori puntuali**

Se X è una variabile casuale continua, $\boldsymbol{P(X=x_0) = 0}$, per ogni x_0 e

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$

ATTENZIONE: a volte ci si può confondere con la notazione, lasciando sottinteso un intervallo di valori (tipicamente la risoluzione di uno strumento di misura)

ESEMPIO: V=1.74 V, con risoluzione 0.01 V,
significa 1.735 V $\le V <$ 1.745 V

Probabilità "locale" in un intorno di x_0 e "puntuale" nel punto x_0

$$P(x_0 \pm \Delta x) = P(x_0 - \Delta x \le x \le x_0 + \Delta x) =$$

$$= \int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} f(x)\mathrm{d}x = \widetilde{F}(x_0+\Delta x) - \widetilde{F}(x_0-\Delta x)$$ **Prob. locale**

dove $\widetilde{F}(x)$ è una primitiva di $f(x)$, ovvero $f(x) = \mathrm{d}\widetilde{F}(x)/\mathrm{d}x$

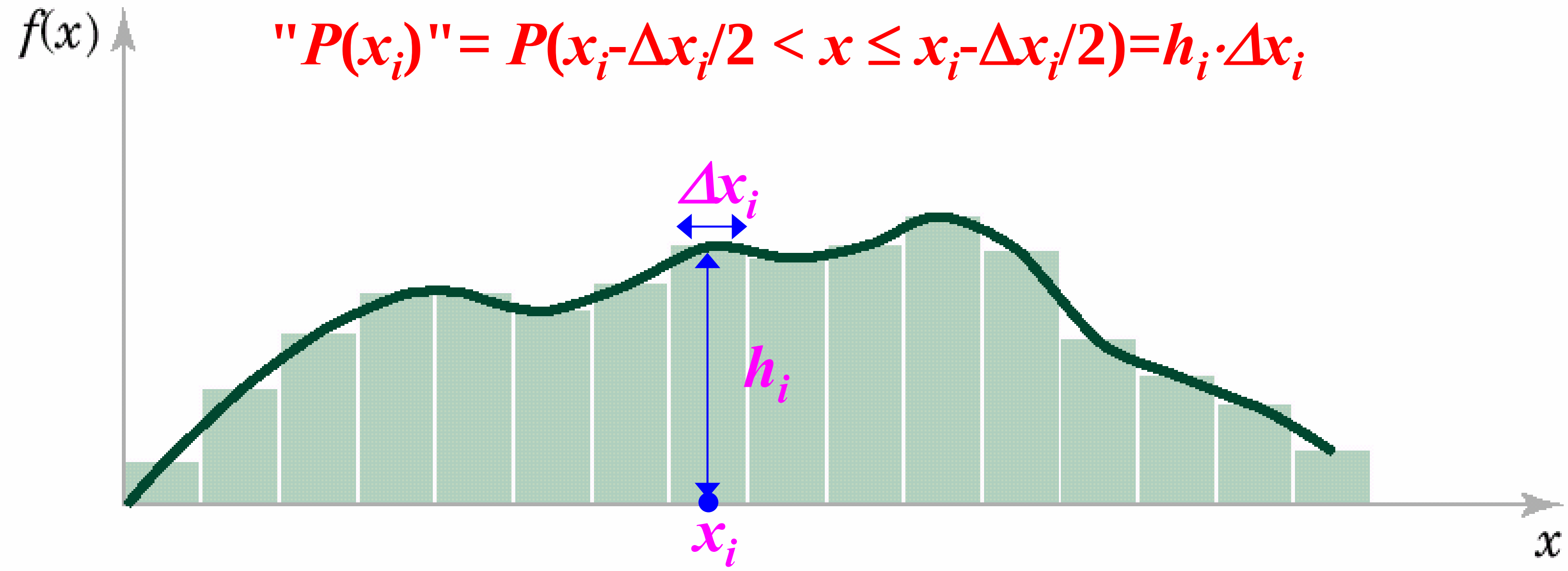
$$P(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[P(x_0 - \Delta x \le x \le x_0 + \Delta x)\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x_0)\cdot 2\Delta x\right] \equiv 0$$ **Prob. puntuale**

Funzione Densità di Probabilità e Istogrammi

Un istogramma è un'approssimazione della funzione densità di probabilità: se <u>l'area di ogni settore (barra) rappresenta la frequenza relativa (ossia la probabilità) dell'intervallo</u> in ascissa (classe) corrispondente, l'istogramma di frequenza "assomiglia" alla PDF

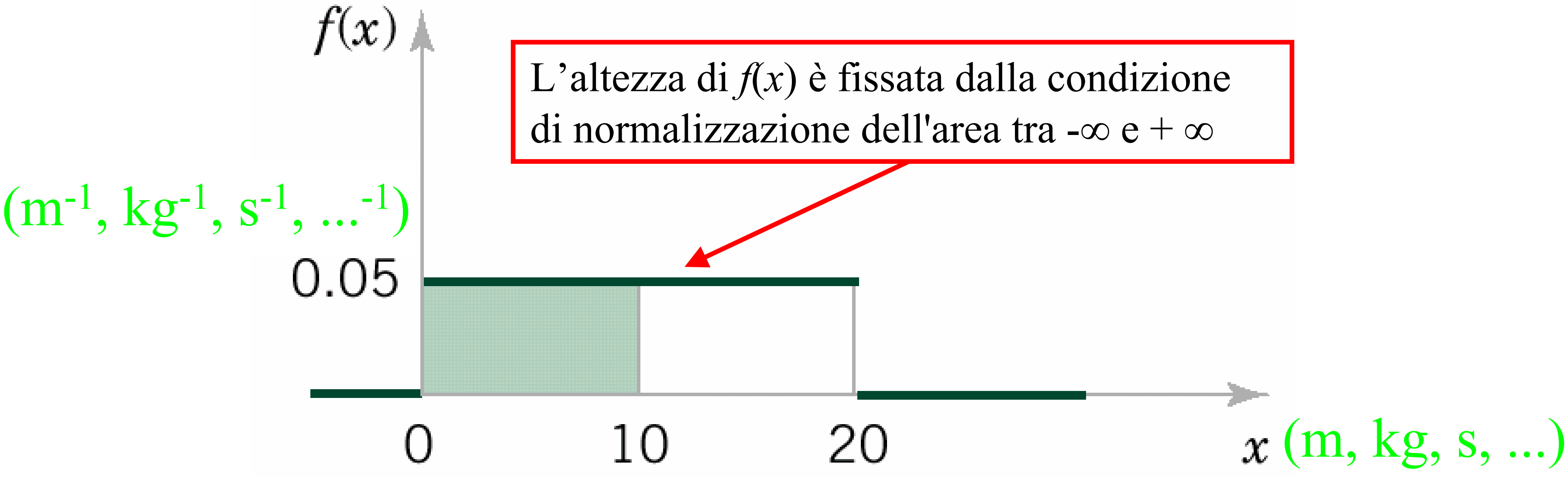
$$\text{"}P(x_i)\text{"} = P(x_i - \Delta x_i/2 < x \le x_i - \Delta x_i/2) = h_i \cdot \Delta x_i$$



Per $\Delta x \to 0$ l'istogramma tende alla curva continua $f(x)$ che è la funzione densità di probabilità (PDF)

Esempio di PDF

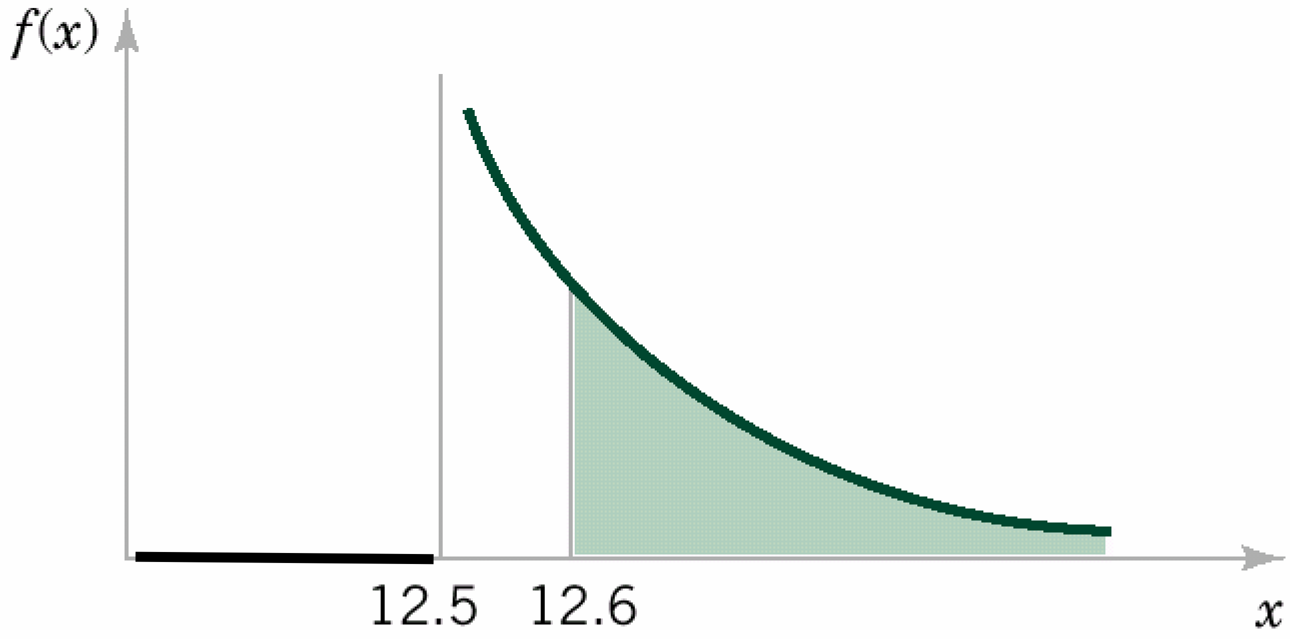
Distribuzione di probabilità uniforme



Ad esempio la VC X può assumere in maniera equiprobabile (o uniforme) un qualsiasi valore x tra 0 e 20

Esempio di PDF

Distribuzione di probabilità esponenziale



Ad es. la variabile casuale *X* può assumere solo valori >12.5 e con una probabilità esponenziale decrescente per *x* che cresce

Funzione di Distribuzione Cumulativa

$$F(x) \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u \quad = P\left(X \in]-\infty, x]\right)$$

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

<u>Proprietà della cumulativa:</u>

$F(x) \geq 0$ per ogni x

$F(x)$ è monotona non decrescente

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Valor Medio

Definizione:

Sia X una variabile casuale continua con PDF $f(x)$.
Il **valor medio** o **valore atteso** di X, indicato con μ o $E(X)$, vale:

$$\mu \overset{\Delta}{=} E[X] \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\mathrm{d}x = E(X)$$

è l'analogo di $\bar{x} = \sum x_i \frac{1}{n}$

Se occorre specificare che μ è la media proprio della VC X
si può anche scrivere esplicitamente μ_X al posto di μ
talora il valor medio si indica anche con $\mu(X)$

Varianza e Deviazione Standard

Definizione:

Sia X una variabile casuale continua con PDF $f(x)$.

La **varianza** di X, indicata con σ^2 o $V(X)$, vale:

$$\sigma^2 \stackrel{\Delta}{=} E\left[(x-\mu)^2\right] \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = V(X)$$

è l'analogo di $s^2 = \sum (x_i - \overline{x})^2 \dfrac{1}{n-1}$

La **deviazione standard** $\boldsymbol{\sigma}$ della VC X vale $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(X)}$

Naturalmente si può indicare $\sigma_X^2 \equiv \sigma^2$ e $\sigma_X \equiv \sigma$ per la VC X

“Potenza” di un Segnale

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x}_{} - \mu^2$$

"potenza" del segnale
di ampiezza X (val. quadr. medio)

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &\stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x^2 - 2x\mu + \mu^2\right] f(x)\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x - 2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x - 2\mu\mu + \mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x - \mu^2\end{aligned}$$

e dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \mu^2 + \sigma^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{P = P_{\mathrm{DC}} + P_{\mathrm{AC}}}}$$

Distribuzione Normale o Gaussiana

Definizione:

Una variabile casuale X con funzione densità di probabilità

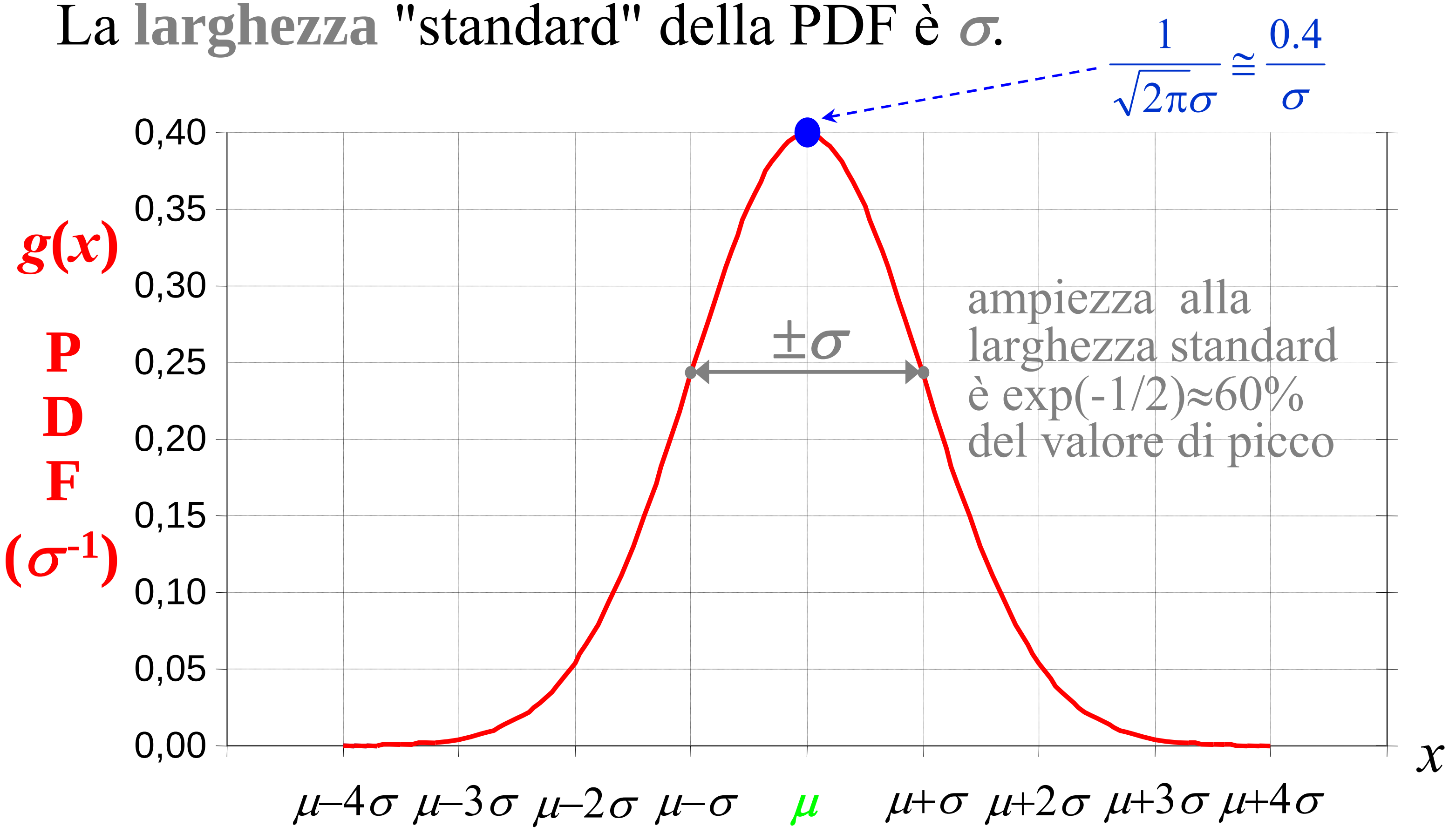
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = g(x)} \qquad \text{per } -\infty < x < +\infty$$

ha una **distribuzione normale** (ed è chiamata variabile casuale normale), con **parametri** μ **e** σ, dove $-\infty < \mu < +\infty$ e $\sigma > 0$.

Inoltre: $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$

La Gaussiana (PDF normale)

La distribuzione è simmetrica e centrata attorno al valore di picco per $x=\mu$ (moda e **media** coincidono, e anche la mediana).
Per x che si allontana da μ la PDF decresce esponenzialmente.
La **larghezza** "standard" della PDF è σ.



Normalizzazione PDF Gaussiana e suo fattore di scala/ampiezza

Ricordando che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}$ (integrale di Gauss)

e sostituendo nella $g(x)$ della PDF gaussiana le variabili

$$y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \quad \text{e} \quad \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\mathrm{d}x$$

si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = 1$$

Integrale di Gauss ("facoltativo")

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \quad \text{o anche} \quad I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$$

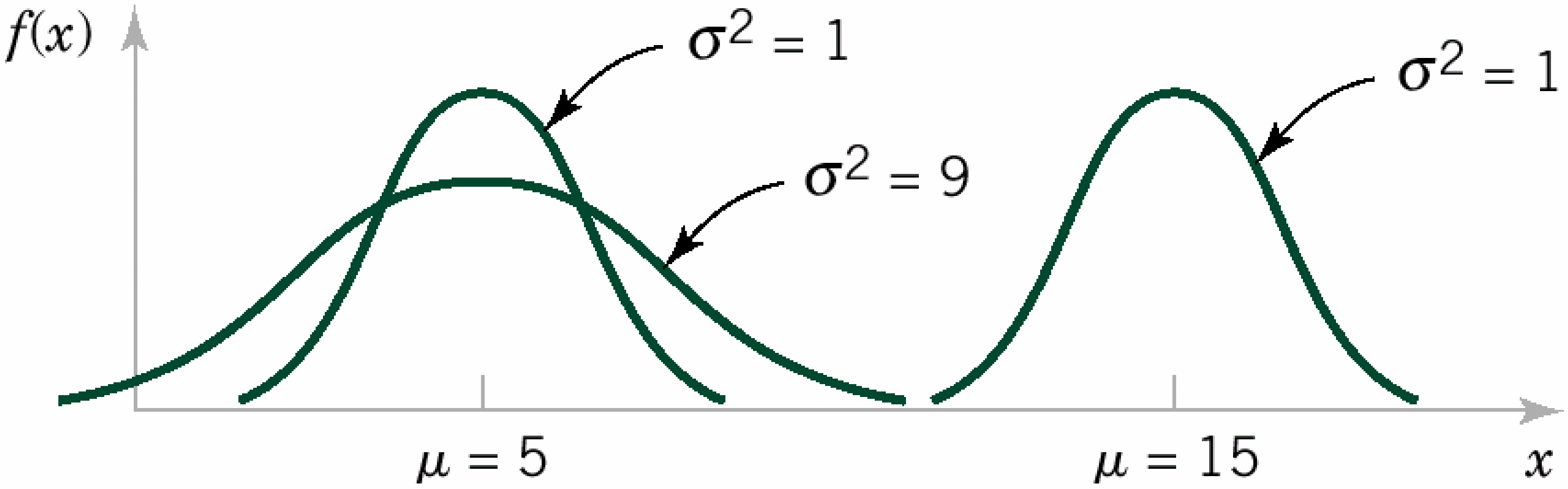
$$I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dx\,dy$$

passando a coordinate polari con $x=\rho\cos(\theta)$ e $y=\rho\sin(\theta)$ ovvero $\rho=(x^2+y^2)^{1/2}$ e $\theta=\mathrm{arctg}(y/x)$, si può calcolare

$$I^2=\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho\,d\theta\cdot d\rho=\int_0^{+\infty} 2\rho e^{-\rho^2}\,d\rho\int_0^{2\pi}(1/2)\,d\theta=$$

$$=\left[-e^{-\rho^2}\right]_0^{+\infty}\pi=[-0+1]\cdot\pi=\pi \Rightarrow \quad I=\sqrt{\pi}$$

Esempi di distribuzione normale



Grafici di funzioni densità di probabilità normale per diversi valori dei parametri μ e σ^2.

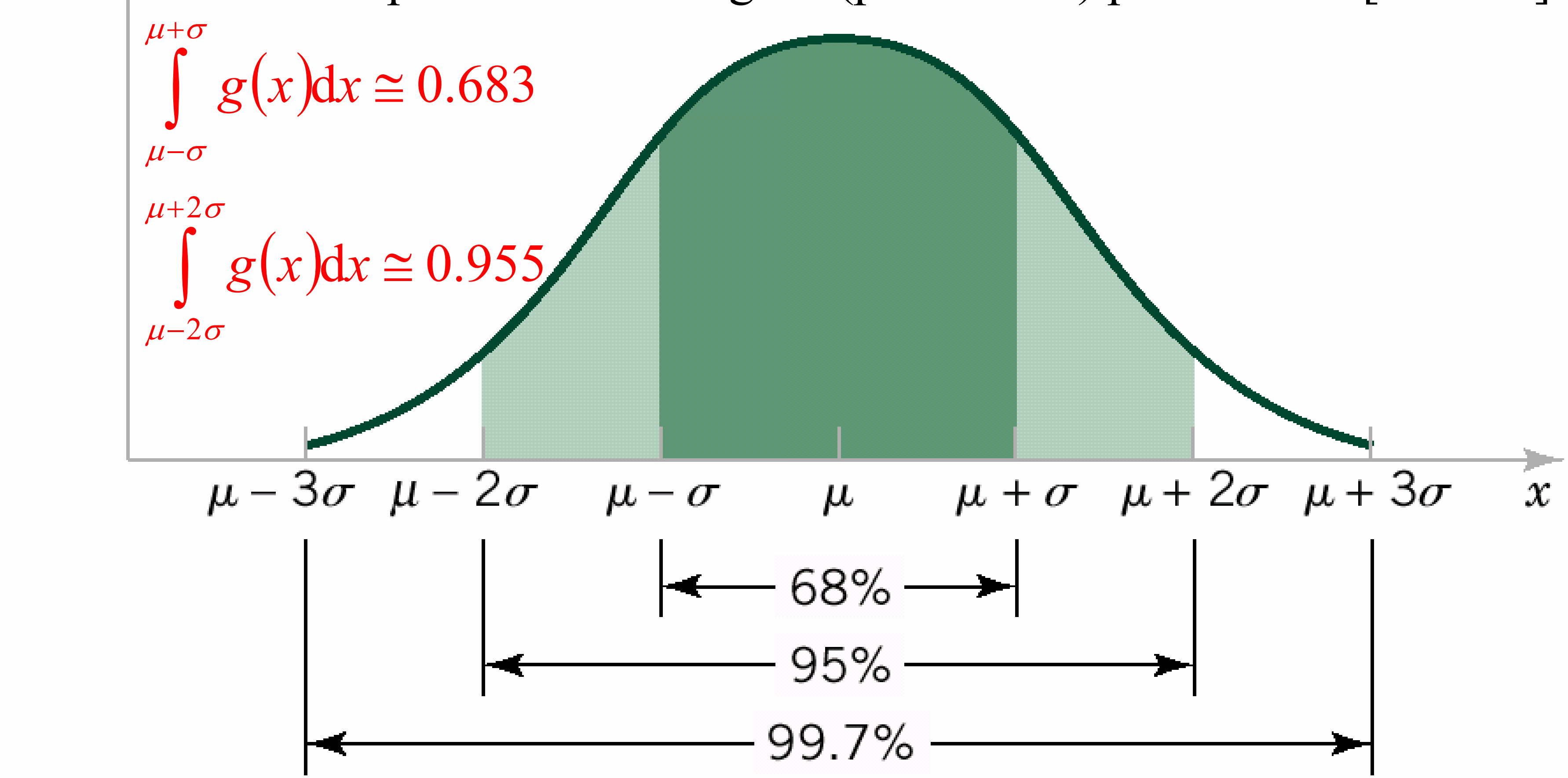
(μ indica **“il centro”** e $\boldsymbol{\sigma}$ **“la larghezza”** della curva a campana)

Probabilità associate alla distribuzione normale

$g(x)$ non è integrabile analiticamente tra due estremi a e b sull'asse reale e dunque per ricavarne l'integrale si ricorre a intervalli predefiniti e integrali (probabilità) precalcolati [tabulati]

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} g(x)\mathrm{d}x \cong 0.683$$

$$\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} g(x)\mathrm{d}x \cong 0.955$$



Variabile casuale normale standard

Definizione:

Una variabile casuale normale con valor medio nullo e varianza unitaria è definita **variabile casuale normale standard (VNS)**, tipicamente indicata con Z (t.c. μ_Z=0 e σ_Z=1).

Se X è una variabile casuale normale con valor medio $E(X) = \mu$ e varianza $V(X) = \sigma^2$, allora la variabile casuale

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

(è sempre un "numero puro")

è una variabile casuale $\boxed{\text{normale standard.}}$

La trasformazione $X \rightarrow Z$ si chiama **standardizzazione della VC** X

Distribuzione cumulativa di una VNS

Definizione:

La funzione

$$\boldsymbol{\Phi(z) = P(Z \leq z)} = \int_{-\infty}^{z} g(u)\mathrm{d}u \Big|_{\substack{\mu=0 \\ \sigma=1}}$$

E' l'area sotto la gaussiana standard da -∞ fino a z

è la **distribuzione cumulativa di una variabile normale standard.**

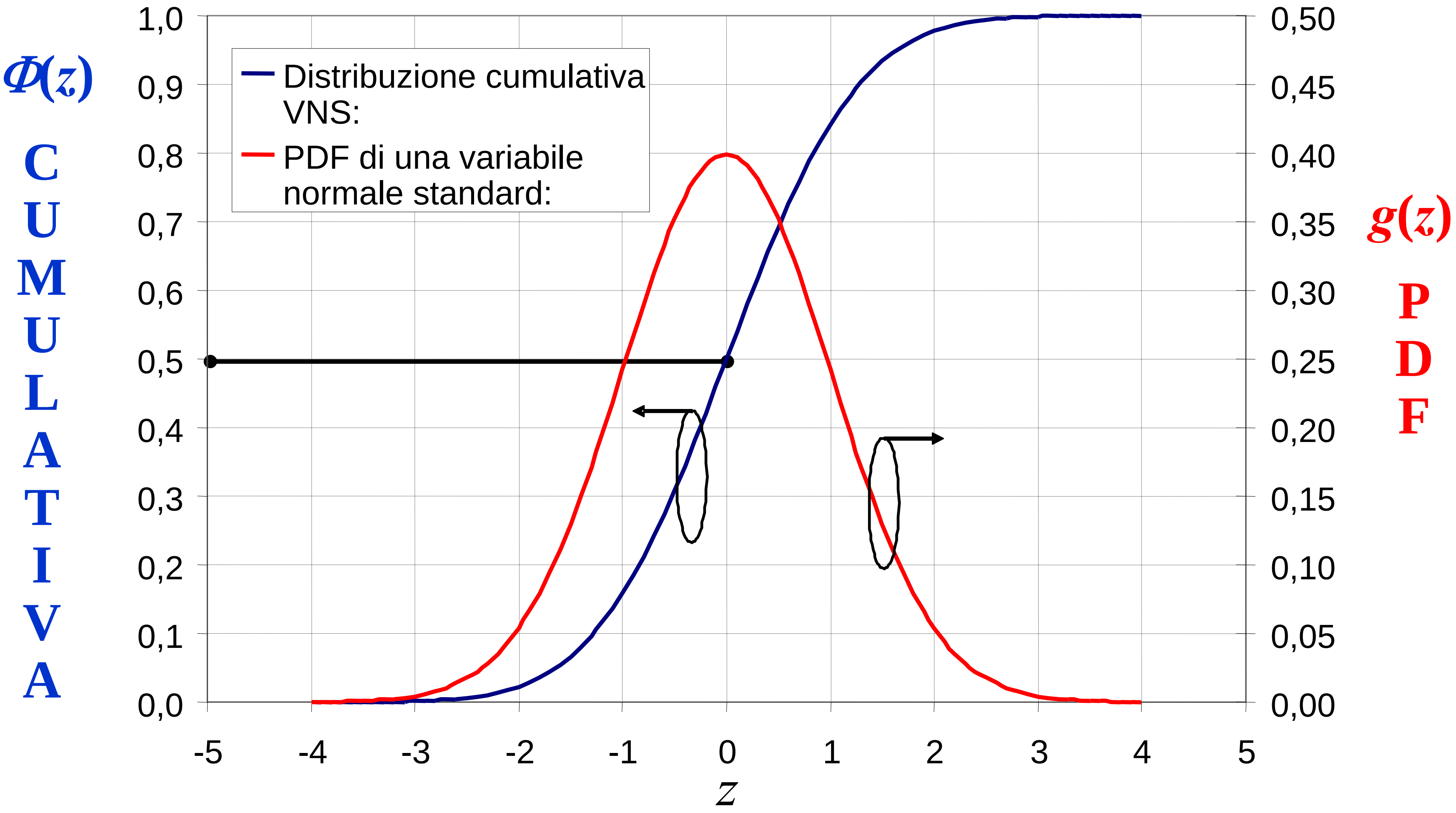
Non essendo $\Phi(z)$ una funzione ricavabile in maniera analitica (non è esprimibile per mezzo di funzioni elementari) è necessario ricorrere a una tabella calcolata numericamente per ricavarne i valori.

Sono calcolabili analiticamente:

$$\Phi(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\mathrm{d}u \Big|_{\substack{\mu=0 \\ \sigma=1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = 1 = 100\ \%$$

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{0} g(u)\mathrm{d}u \Big|_{\substack{\mu=0 \\ \sigma=1}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\mathrm{d}u \Big|_{\substack{\mu=0 \\ \sigma=1}} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\ \%$$

Grafici di $\Phi(z)$ e di $g(z)$



Proprietà di $\Phi(z)$

Data la simmetria di $\Phi(z)$ rispetto all'origine $\mu = 0$, si ha che

$\boldsymbol{\Phi(-z_0)=1-\Phi(z_0)}$ (aree in grigio)

$\Phi(z_0) + \Phi(-z_0) = 1$ (tutta l'area sotto la gaussiana)

essendo $\int_{-\infty}^{+\infty} g(z) = \Phi(+\infty) = 1$

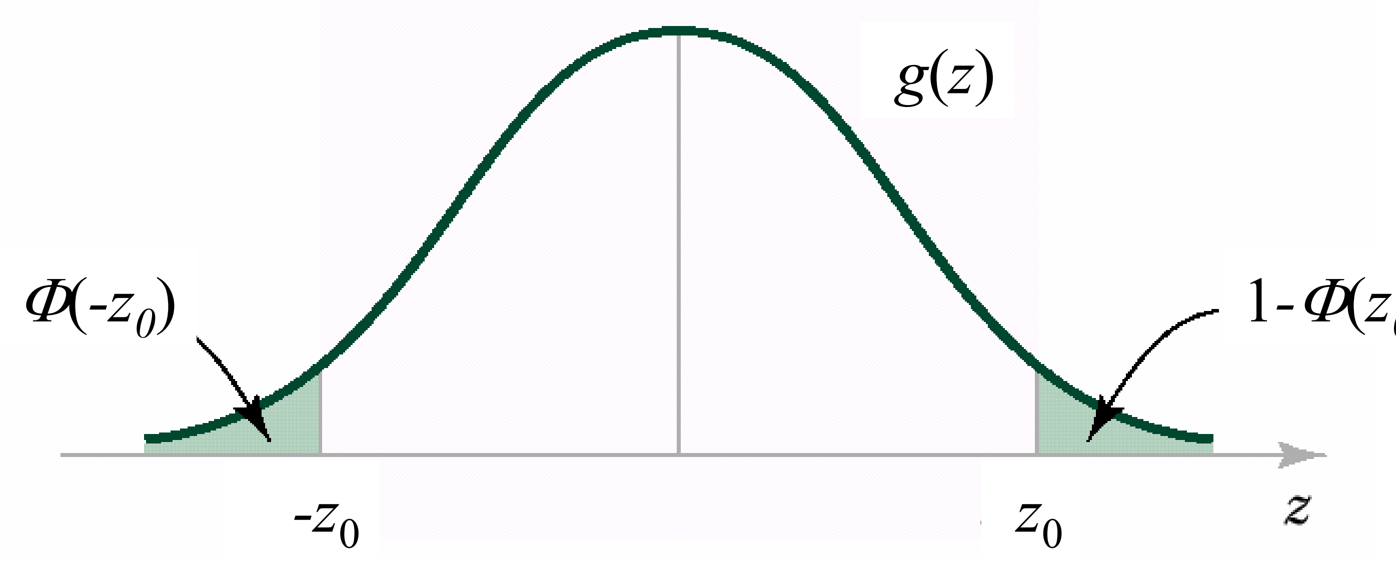


Tabella di valori di $\Phi(z)$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
-4	0,00003	-2	0,02275	0	0,50000	2	0,97725
-3,9	0,00005	-1,9	0,02872	0,1	0,53983	2,1	0,98214
-3,8	0,00007	-1,8	0,03593	0,2	0,57926	2,2	0,98610
-3,7	0,00011	-1,7	0,04457	0,3	0,61791	2,3	0,98928
-3,6	0,00016	-1,6	0,05480	0,4	0,65542	2,4	0,99180
-3,5	0,00023	-1,5	0,06681	0,5	0,69146	2,5	0,99379
-3,4	0,00034	-1,4	0,08076	0,6	0,72575	2,6	0,99534
-3,3	0,00048	-1,3	0,09680	0,7	0,75804	2,7	0,99653
-3,2	0,00069	-1,2	0,11507	0,8	0,78814	2,8	0,99744
-3,1	0,00097	-1,1	0,13567	0,9	0,81594	2,9	0,99813
-3	0,00135	-1	0,15866	1	0,84134	3	0,99865
-2,9	0,00187	-0,9	0,18406	1,1	0,86433	3,1	0,99903
-2,8	0,00256	-0,8	0,21186	1,2	0,88493	3,2	0,99931
-2,7	0,00347	-0,7	0,24196	1,3	0,90320	3,3	0,99952
-2,6	0,00466	-0,6	0,27425	1,4	0,91924	3,4	0,99966
-2,5	0,00621	-0,5	0,30854	1,5	0,93319	3,5	0,99977
-2,4	0,00820	-0,4	0,34458	1,6	0,94520	3,6	0,99984
-2,3	0,01072	-0,3	0,38209	1,7	0,95543	3,7	0,99989
-2,2	0,01390	-0,2	0,42074	1,8	0,96407	3,8	0,99993
-2,1	0,01786	-0,1	0,46017	1,9	0,97128	3,9	0,99995

Tabella di valori di $\Phi(z)$

	z	$\Phi(z)$
~30 ppm	-4	0,00003
	-3,9	0,00005
	-3,8	0,00007
	-3,7	0,00011
	-3,6	0,00016
	-3,5	0,00023
	-3,4	0,00034
	-3,3	0,00048
	-3,2	0,00069
	-3,1	0,00097
~1.5 ‰	-3	0,00135
	-2,9	0,00187
	-2,8	0,00256
	-2,7	0,00347
	-2,6	0,00466
	-2,5	0,00621
	-2,4	0,00820
	-2,3	0,01072
	-2,2	0,01390
	-2,1	0,01786

	z	$\Phi(z)$
~2.25 %	-2	0,02275
	-1,9	0,02872
	-1,8	0,03593
	-1,7	0,04457
	-1,6	0,05480
	-1,5	0,06681
	-1,4	0,08076
	-1,3	0,09680
	-1,2	0,11507
	-1,1	0,13567
~16 %	-1	0,15866
	-0,9	0,18406
	-0,8	0,21186
	-0,7	0,24196
	-0,6	0,27425
	-0,5	0,30854
	-0,4	0,34458
	-0,3	0,38209
	-0,2	0,42074
	-0,1	0,46017

	z	$\Phi(z)$
50 %	0	0,50000

$$\Phi(z_0)=1-\Phi(-z_0)$$

Intervalli a $\pm(1/2/3)\sigma$

Sul Libro e anche sul sito WEB della Didattica è disponibile una tabella di valori di $\Phi(z)$ per z tra -4 e +4 con passo 0.01 (801 valori)

Intervallo $\mu\pm1\sigma$	**Intervallo** $\mu\pm2\sigma$	**Intervallo** $\mu\pm3\sigma$
$\Phi(1)-\Phi(-1)=$	$\Phi(2)-\Phi(-2)=$	$\Phi(3)-\Phi(-3)=$
$0.84134-0.15866=0.68268$	$0.97725-0.02275=0.95450$	$0.99865-0.00135=0.99730$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\boldsymbol{P}$**=68.3 %**	$\boldsymbol{P}$**=95.5 %**	$\boldsymbol{P}$**=99.7 %**

Ricordando che $\Phi(\pm z)=1-\Phi(\mp z)$ $\quad$ [con $z>0 \Rightarrow \Phi(z)>0.5$]

si ha che $\boldsymbol{\Phi(z)-\Phi(-z)=P(-z\le Z\le z)}=\Phi(z)-[1-\Phi(z)]\boldsymbol{=2\Phi(z)-1}$

prob. $\boldsymbol{P}$ di stare dentro un interv. simm. attorno a μ: $\boldsymbol{\Phi(z)=[1+P]/2=0.5+P/2}$

prob. $\boldsymbol{Q}$ di stare fuori da un interv. simm. attorno a μ: $\boldsymbol{\Phi(z)=1-Q/2}$

Intervalli ±z che lasciano fuori un x% dei valori possibili

fuori	$\boldsymbol{\Phi(z)}$	$\boldsymbol{\pm z}$
50 %	0.75	±0.68
10 %	0.95	±1.65
1 %	0.995	±2.58
1 ‰	0.9995	±3.30
0.1 ‰ (100 ppm)	$1\text{-}0.5\times10^{-4}$	±3.89

$\pm1\sigma \rightarrow$ *out* ~30 %

$\pm2\sigma \rightarrow$ *out* ~5 %

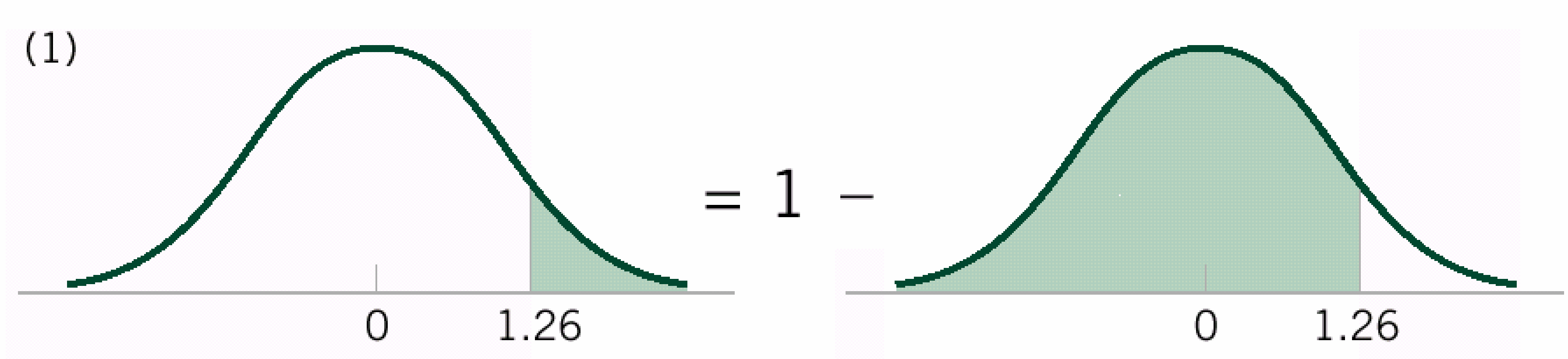
$\pm3\sigma \rightarrow$ *out* ~3 ‰

prob. ***P*** di stare dentro un interv. simm. attorno a μ: $\boldsymbol{\Phi(z)=[1+P]/2=0.5+P/2}$

prob. ***Q*** di stare fuori da un interv. simm. attorno a μ: $\boldsymbol{\Phi(z)=1\text{-}Q/2}$

Esempi di calcoli di probabilità con una VNS

$$\textbf{(1)}\quad P(Z > 1.26) = 1 - P(Z \leq 1.26) = 1 - 0.89616 = 0.10384$$



$$P(Z \leq 1.26) = \Phi(1.26) \cong \Phi(1.2) + 0.6 \cdot [\Phi(1.3) - \Phi(1.2)]$$

da dove origina la approssimazione?

1,2	0,88493
1,3	0,90320

$\Phi(z)$ per z con un solo decimale

$$\Phi(1.26) \cong 0.88493 + 0.6 \cdot [0.90320 - 0.88493]$$

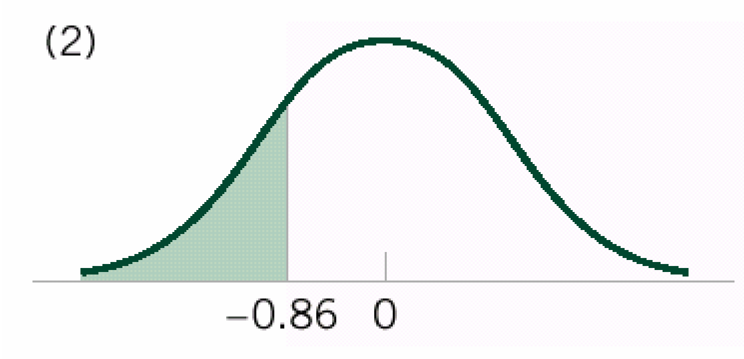
$$0.88493 + 0.6 \cdot 0.01827 \cong 0.895892 \sim 0.896$$

e infine $\boldsymbol{P(Z>1.26)} \cong 1 - 0.896 = \mathbf{0.104}$ (approssimato)

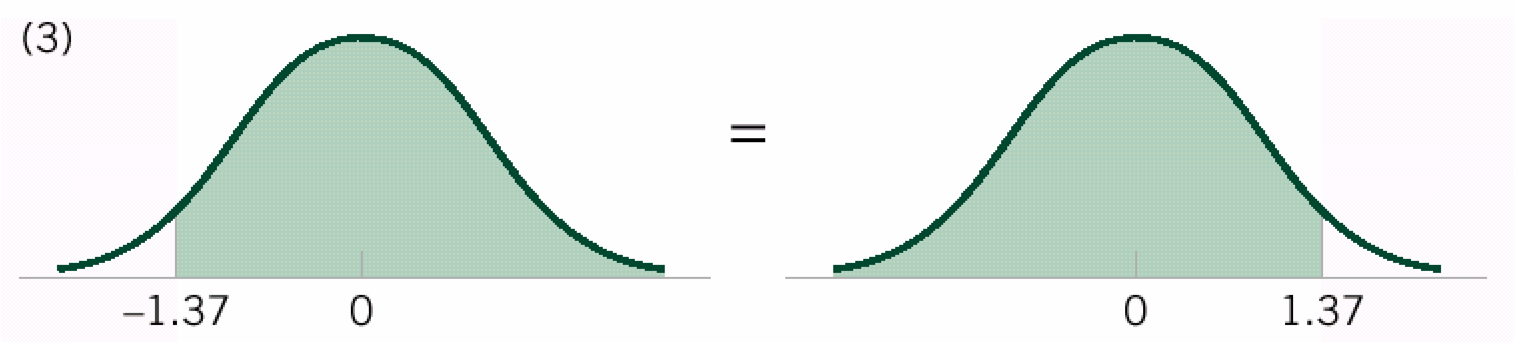
Altrimenti si consulta la tabella di $\Phi(z)$ con *z-values* a 2 cifre decimali, dove $\Phi(1.26) = 0.896165$ [$\cong 0.895892$ (approx. “lineare”)] e $\boldsymbol{P(Z>1.26)=0.103835}$

Esempi di calcoli di probabilità con una VNS

(2) $P(Z < -0.86) = 0.19490$



(3) $P(Z > -1.37) = P(Z < 1.37) = 0.91465$



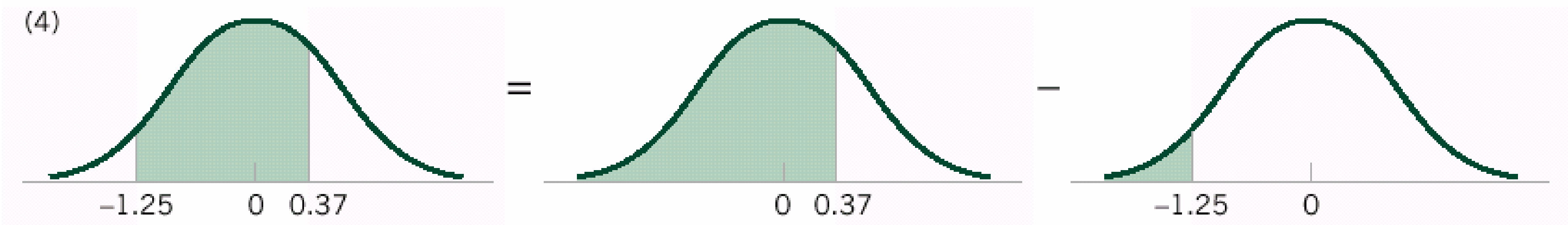
Esempi di calcoli di probabilità con una VNS

(4) $P(-1.25 < Z < 0.37)$. This probability can be found from the difference of two areas, $P(Z < 0.37) - P(Z < -1.25)$. Now,

$$P(Z < 0.37) = 0.64431 \quad \text{and} \quad P(Z < -1.25) = 0.10565$$

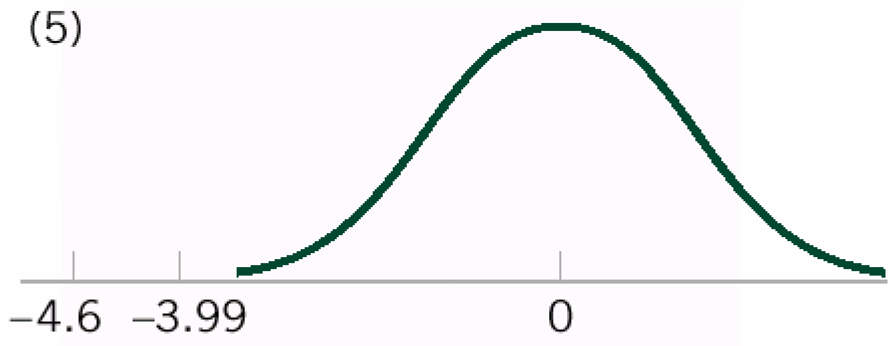
Therefore,

$$P(-1.25 < Z < 0.37) = 0.64431 - 0.10565 = 0.53866$$



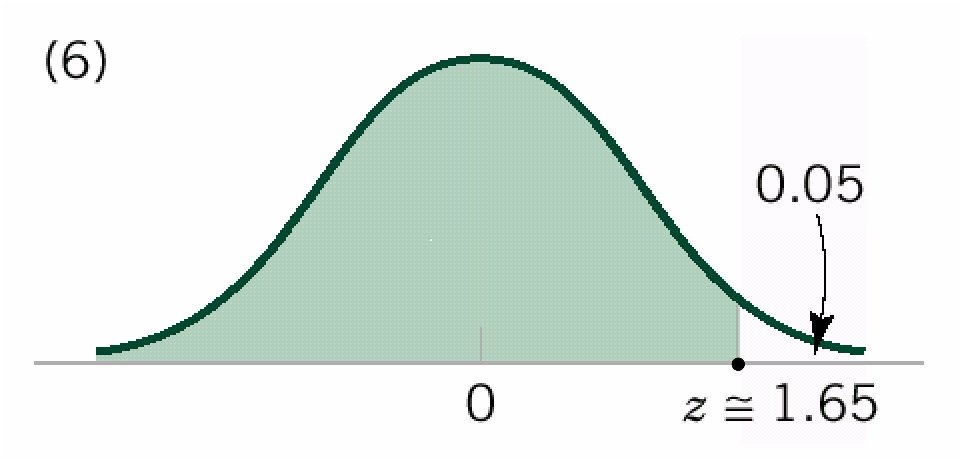
Esempi di calcoli di probabilità con una VNS

(5) $P(Z \leq -4.6)$ cannot be found exactly from Table I. However, the last entry in the table can be used to find that $P(Z \leq -3.99) = 0.00003$. Because $P(Z \leq -4.6) < P(Z \leq -3.99)$, $P(Z \leq -4.6)$ is 'nearly zero' and certainly $<3\times10^{-5}$



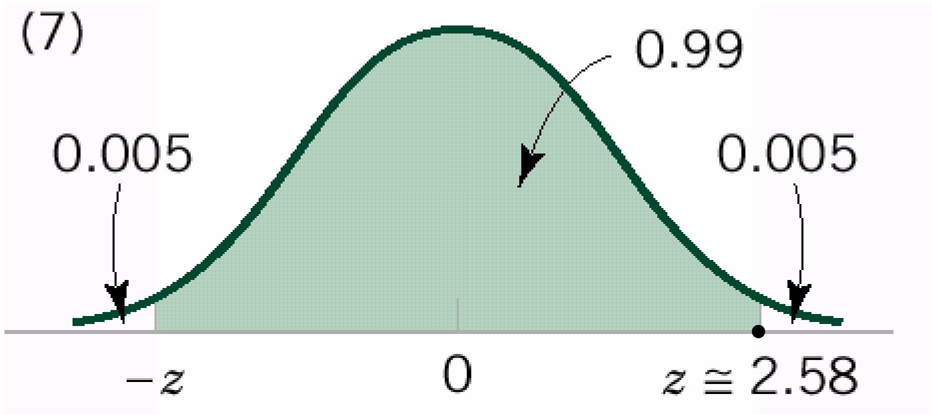
Esempi di calcoli di probabilità con una VNS

(6) Find the value z such that $P(Z > z) = 0.05$. This probability equation can be written as $P(Z \leq z) = 0.95$. Now, Table I is used in reverse. We search through the probabilities to find the value that corresponds to 0.95. The solution is illustrated in Fig. 3-15. We do not find 0.95 exactly; the nearest value is 0.95053, corresponding to $z = 1.65$.



Esempi di calcoli di probabilità con una VNS

(7) Find the value of z such that $P(-z < Z < z) = 0.99$. Because of the symmetry of the normal distribution, if the area of the shaded region in Fig. 3-15(7) is to equal 0.99, then the area in each tail of the distribution must equal 0.005. Therefore, the value for z corresponds to a probability of 0.995 in Table I. The nearest probability in Table I is 0.99506, when $z = 2.58$.



Standardizzazione di una variabile casuale normale

Sia X una variabile casuale normale con valor medio μ e varianza σ^2 allora

$$P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \le z)$$

dove $\boldsymbol{Z} = (X- \mu) / \sigma$ è una **variabile casuale normale standard** e
$z = (x- \mu) / \sigma$ è il valore ottenuto dalla standardizzazione di X.

La probabilità $P(X \le x)$ è ottenibile utilizzando la tabella di $\Phi(z)$ e leggendo la probabilità in corrispondenza del **valore z = $(x- \mu) / \sigma$**.

Esempio di standardizzazione di una variabile casuale

Supponiamo che le misure di corrente in una matassa di fili seguano una distribuzione normale, con media μ=10 mA e varianza $\sigma^2 = 4$ mA^2.

Quanto vale la probabilità che una misura fornisca un valore superiore a 13 mA?

Quanto vale la probabilità che una misura di corrente sia compresa tra 9 mA e 11 mA?

Determinare il valore di corrente x_{MAX} tale che la probabilità di misurare una corrente inferiore a x_{MAX} sia il 98 %.

Esempio di standardizzazione di una variabile casuale

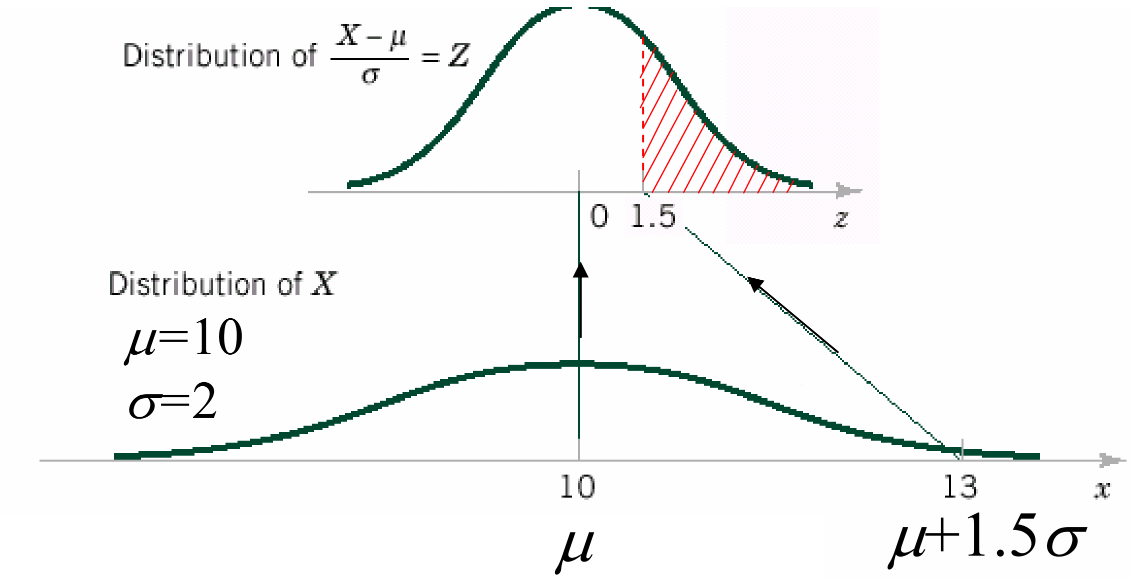
Soluzione

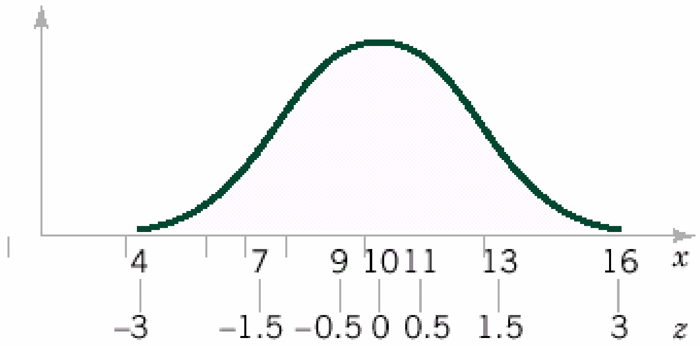
Sia X la corrente in mA. La probabilità incognita è $P(X>13)$.

Poniamo $Z = (X - \mu)/\sigma = (X - 10)/2$.

Notiamo che $X > 13$ corrisponde a $Z > (13-10)/2 = 1.5$ e quindi

$P(X>13) = P(Z>1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.93319 = 0.06681$





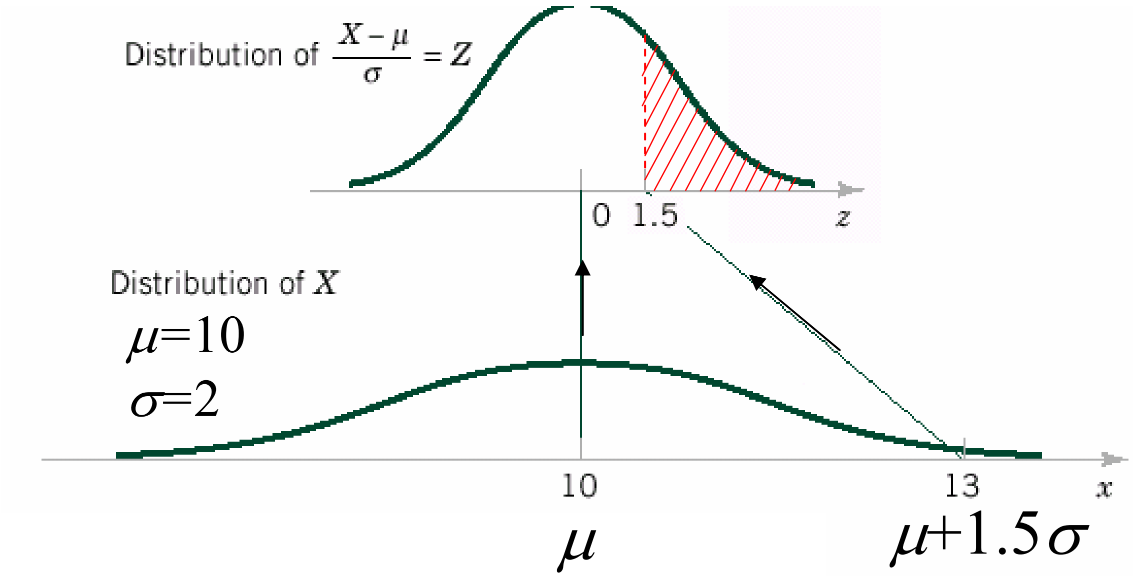
Esempio di standardizzazione di una variabile casuale

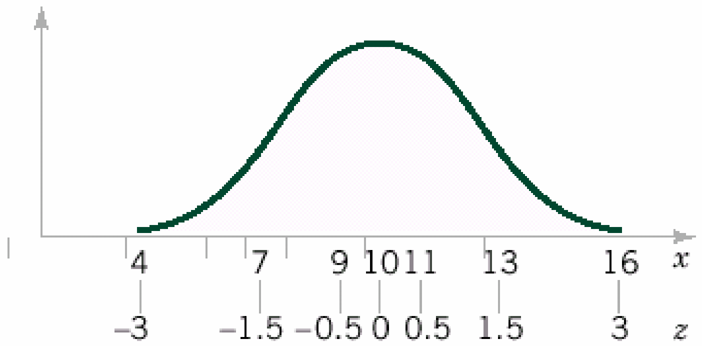
In alternativa il conto si poteva anche fare direttamente come:

$$P(X>13)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{13-\mu}{\sigma}\right)=P\left(\frac{X-10}{2}>\frac{13-10}{2}\right)=$$

$$=P(Z>1.5)=1-P(Z<1.5)=1-\Phi(1.5)=$$

$$=1-0.93319=0.06681\cong 6.7\,\%\approx 7\,\%$$





Esempio di standardizzazione di una variabile casuale

Continuando dall'esercizio precedente, quanto vale la probabilità che una misura di corrente sia compresa tra 9 mA e 11 mA?

Soluzione $\boldsymbol{P(\mu\text{-}0.5\sigma<X<\mu+0.5\sigma) \equiv P(-0.5<Z<+0.5)}$

$$P(9<X<11)=P\left(\frac{9-10}{2}<\frac{X-10}{2}<\frac{11-10}{2}\right)=$$

$$=P(-0.5<Z<0.5)=$$

$$=P(Z<0.5)-P(Z<-0.5)=$$

$$=0.69146-0.30854=0.38292$$

intervallo simmetrico intorno a μ

Alternativamente, $\Phi(+0.5)-\Phi(-0.5)=2\Phi(+0.5)-1=$

$=2\cdot[\Phi(+0.5)-0.5000]=2\cdot 0.19146=0.38292$

Esempio di standardizzazione di una variabile casuale

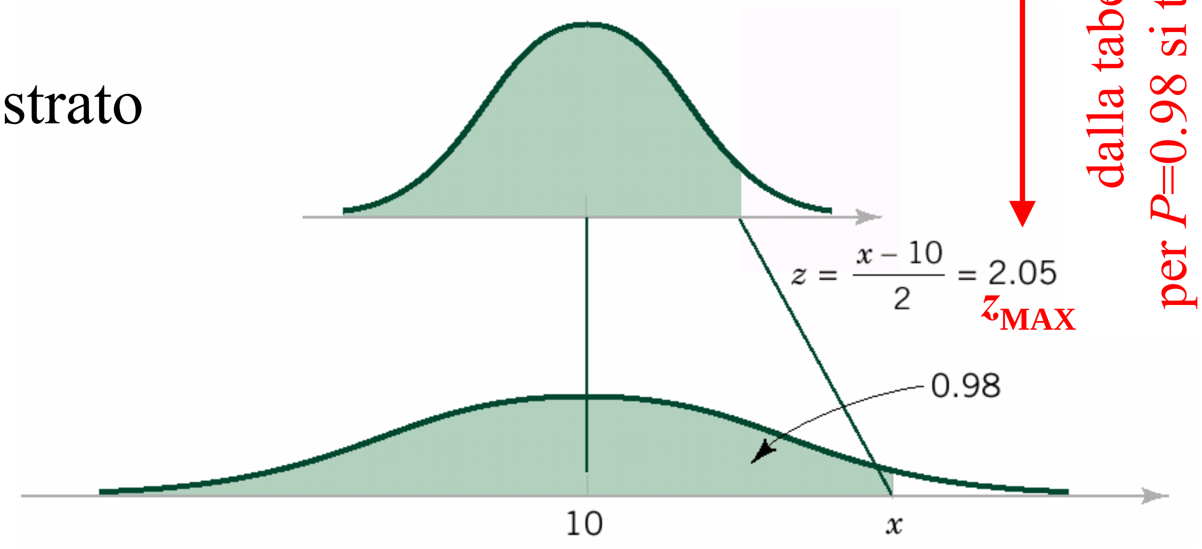
Continuando dall'esercizio precedente: determinare il valore di corrente x_{MAX} tale che la probabilità di misurare una corrente inferiore a x_{MAX} sia il 98%

Soluzione

È richiesto di trovare x_{MAX} tale che $P(X< x_{\text{MAX}}) = 0.98$

Il valore richiesto è mostrato graficamente in figura:

$x_{\text{MAX}} = \mu + z_{\text{MAX}}\sigma =$
$= 10 + z_{\text{MAX}} \cdot 2 =$
$= 10 + 2.05 \cdot 2 =$
$= 14.1$ (mA)



Esempio di standardizzazione di una variabile casuale

Standardizzando la variabile *X*, l'espressione $P(X < x_{\mathrm{MAX}}) = 0.98$ può essere riscritta come

$$P\left(X < x_{\mathrm{MAX}}\right) = P\left(\frac{X - 10}{2} < \frac{x_{\mathrm{MAX}} - 10}{2}\right) =$$
$$= P\left(Z < \frac{x_{\mathrm{MAX}} - 10}{2}\right) = 0.98$$

Usando le tabelle è possibile trovare z_{MAX} tale che $P(Z < z_{\mathrm{MAX}}) = 0.98$
Il <u>valore più vicino</u> a 0.98 è $0.97982 = \underline{P(Z < 2.05)}$
Quindi $z_{\mathrm{MAX}} = (x_{\mathrm{MAX}} - 10)/2 = 2.05$, da cui si ottiene $x_{\mathrm{MAX}} = 14.1$ (mA)

Il valore di corrente desiderato (t.c. la probabilità di misurare una corrente inferiore a questo valore sia del 98 %) è $x_{\mathrm{MAX}} = 14.1$ mA

Grafici di probabilità

Per valutare se i dati acquisiti da un processo o da una misura seguono una determinata distribuzione di probabilità, è possibile utilizzare i grafici di probabilità.
Questi sono **grafici di probabilità cumulativa**, in cui l'asse verticale ha una scala tale da rendere lineare la curva di distribuzione ipotizzata.

Operativamente si costruisce una tabella di distribuzione, le cui **colonne** riportano **gli *n* valori misurati** x_j (ordinati in modo crescente, con j numero d'ordine) **e la frequenza cumulativa osservata** f_j, "osservata" sui dati del campione, e ricavabile dalla formula

$$F^*(x_j) \equiv f_j = (j - 0.5)/n$$

Si riportano quindi i valori delle due colonne sul "foglio di probabilità": se i punti si distribuiscono su una retta si deduce che la variabile considerata ha la distribuzione di probabilità prevista/ipotizzata.

Grafici di probabilità: es. di tabella di distribuzione

Tabella della distribuzione **cumulativa osservata $F^*(x_j)$**

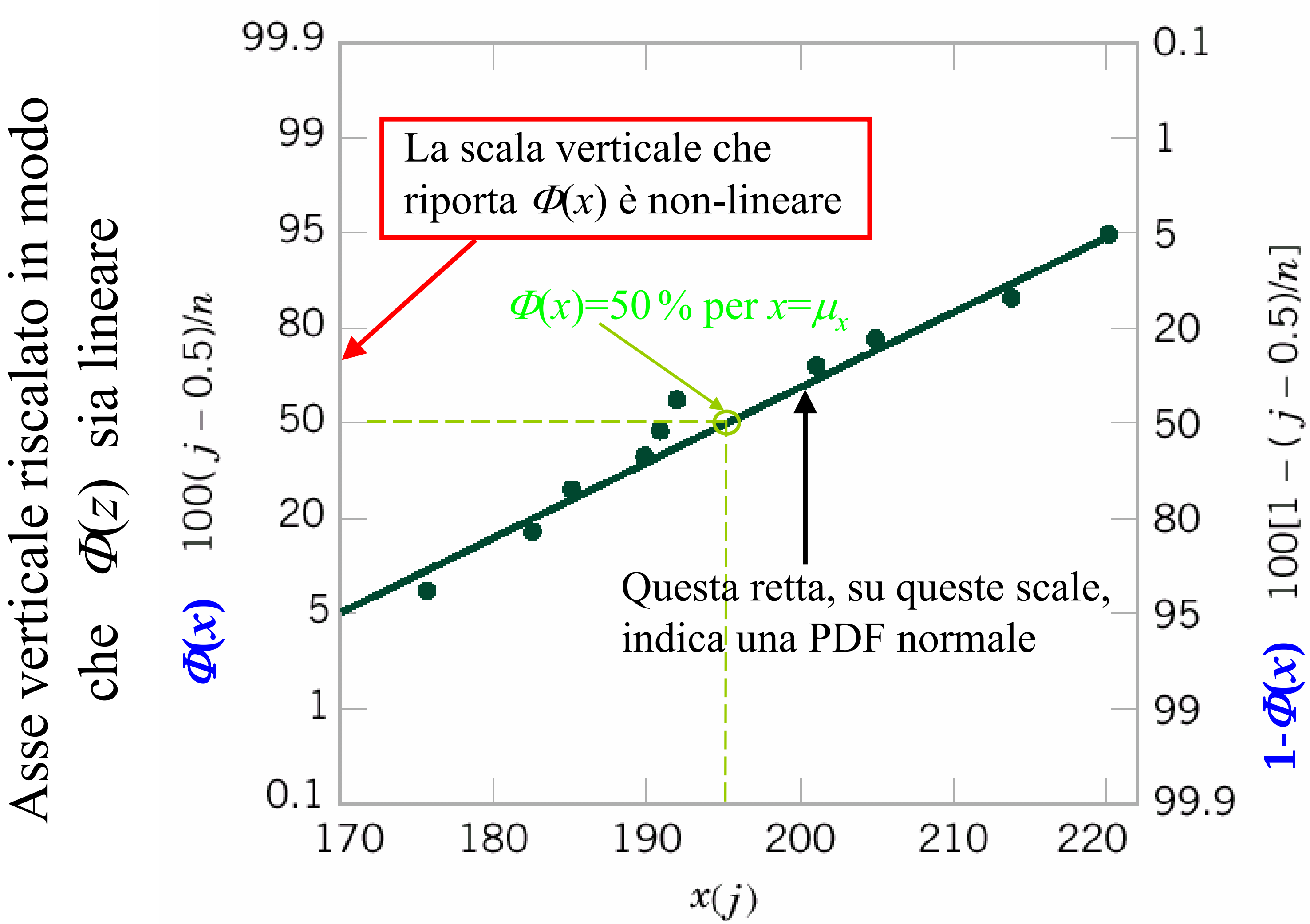
j	$F(x_j)\equiv j$	$x_{(j)}$	$(j - 0.5)/10$
1	1	176	0.05
2	2	183	0.15
3	3	185	0.25
4	4	190	0.35
5	5	191	0.45
6	6	192	0.55
7	7	201	0.65
8	8	205	0.75
9	9	214	0.85
10	10	220	0.95

$F^*(x_j)$

$n=10$

La cumulativa $F(x_j)$ naturalmente parte da 1 e arriva a 10

Grafici di probabilità: esempio per PDF normale



Grafici di probabilità normale

Se non si ha a disposizione un foglio di probabilità, è possibile ricondursi a un grafico di probabilità normale, **trovando i valori z_j** — dalla tabella di $\Phi(z)$ — che corrispondono ai valori di probabilità cumulativa osservata $\Phi(x_j)=F^*(x_j)$ e riportando anche questi valori (4ª colonna) nella tabella di distribuzione.

da $\boldsymbol{\Phi(x_j)=\Phi(z_j)}$
si ricava z_j

$$\frac{j-0.5}{n} = P(Z \leq z_j) = \Phi(z_j)$$

Ad esempio per $\Phi(x_j)$=0.05, z_j=-1.64.

Questo consente di **riscalare l'asse verticale**, $\Phi(x_j)$ **non-lineare**, del grafico di prob. normale **in un nuovo asse lineare** in z_j, dove **<u>una gaussiana è visualizzata come una retta</u>**.

j	$x_{(j)}$	$(j-0.5)/10$	z_j
1	176	0.05	−1.64
2	183	0.15	−1.04
3	185	0.25	−0.67
4	190	0.35	−0.39
5	191	0.45	−0.13
6	192	0.55	0.13
7	201	0.65	0.39
8	205	0.75	0.67
9	214	0.85	1.04
10	220	0.95	1.64

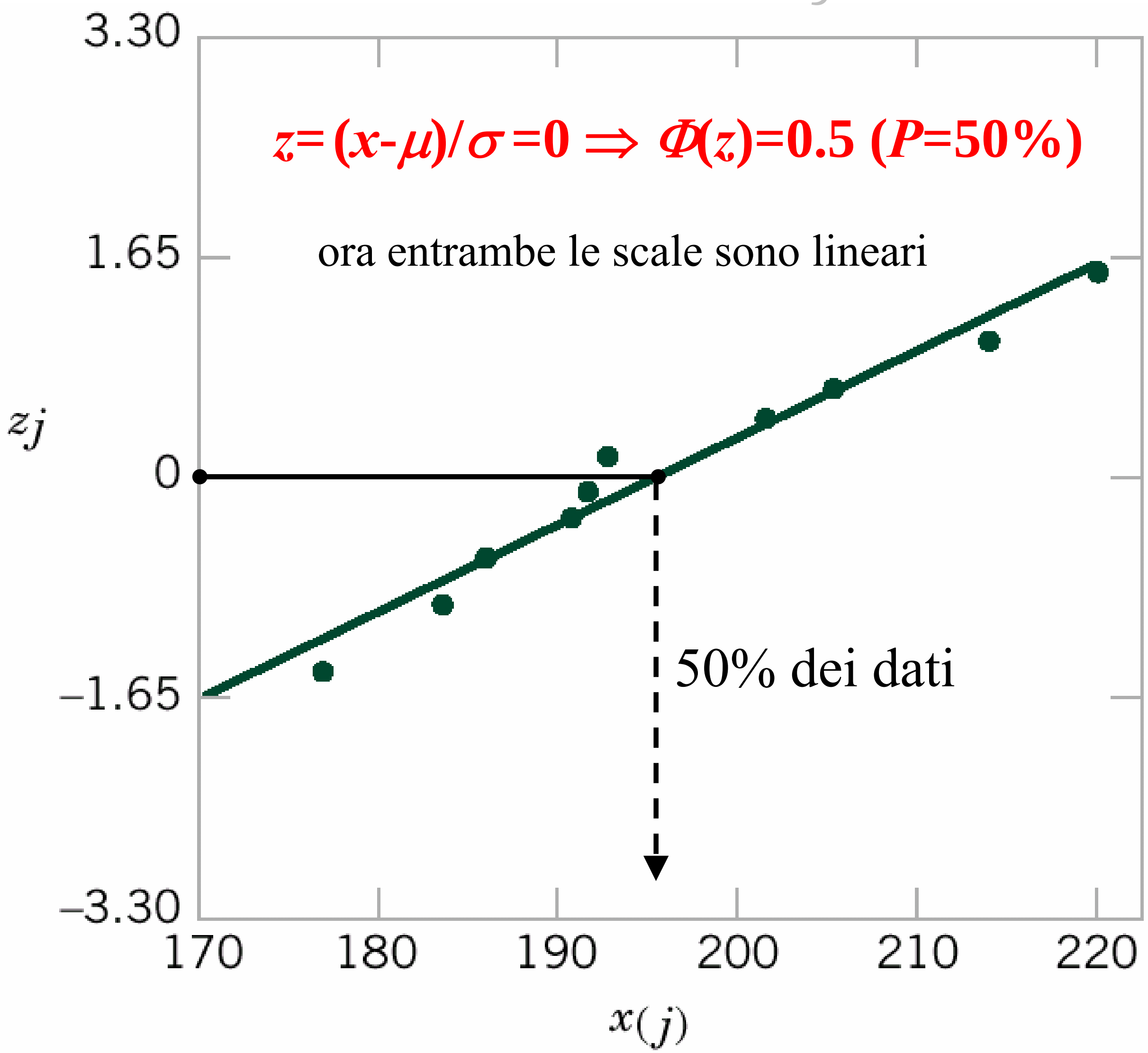
Grafici di “probabilità” normale con ordinate in “scala z_j”

Riportando i valori z_j in funzione degli x_j si ottiene lo stesso andamento del grafico di probabilità ottenibile con il foglio di probabilità normale.

In questo caso la scala verticale è lineare con z_j.

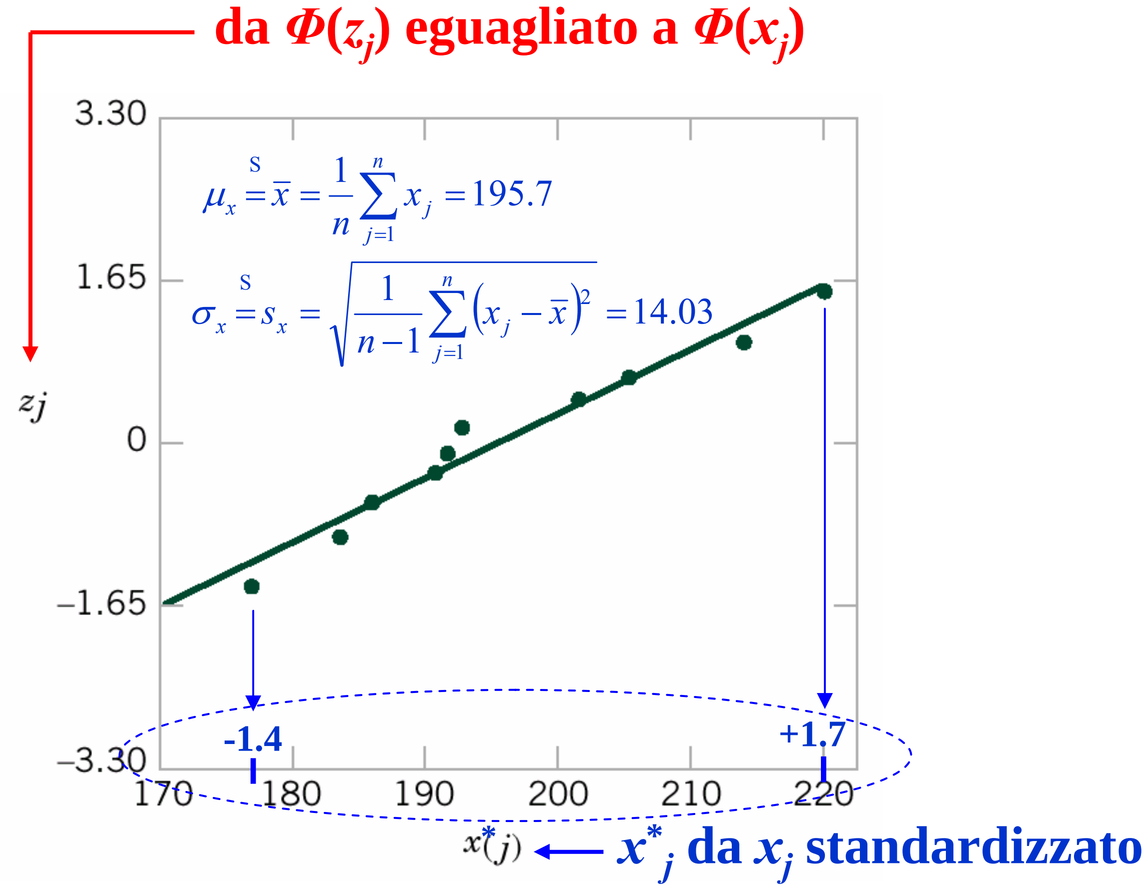
Se la $f(x_j)$ è gaussiana, allora i valori z_j ricavati da $\Phi(x_j)$ sono in relazione lineare con gli x_j.

Standardizzando anche le x_j in ascissa, si deve ottenere una retta a 45°, su doppio asse z.



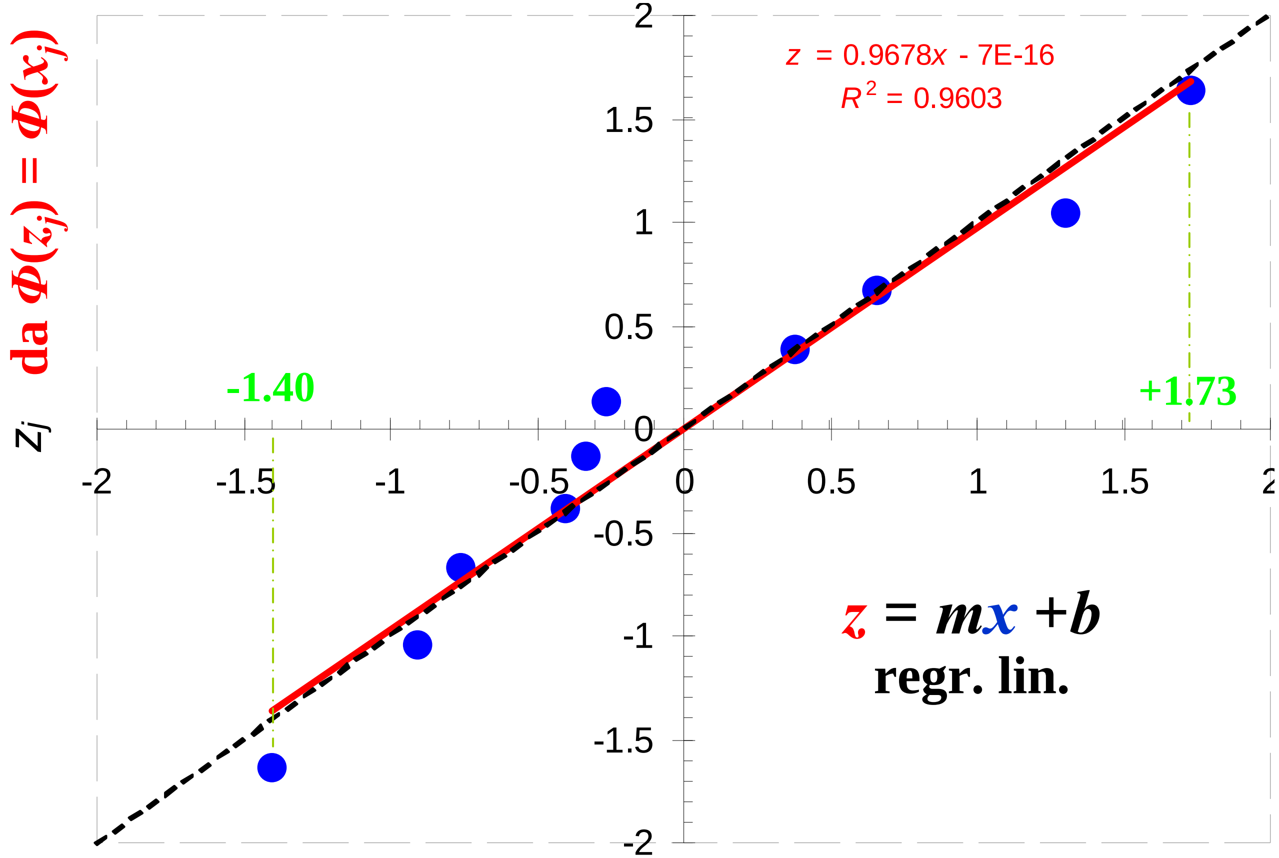
Grafici di probabilità normale con assi x_j e z_j standardizzati

Fare diagramma con asse x^*_j "standardizzato" e retta a 45°… accennare alla retta di regressione ai minimi quadrati per i punti sperimentali e differenze tra la sua pendenza e quella unitaria (della retta a 45°) e il suo offset e quello nullo (della retta a 45°)



Si vuole verificare se i punti stanno ora sulla bisettrice 1°-3°quadrante avendo centrato a zero e riscalato anche l'asse delle ascisse: $x^*_j=(x_j-\mu_x)/\sigma_x$

Grafici di probabilità normale con x_j e z_j normalizzate



x^*_j **da** x_j **standardizzato** $\quad x_j^* = (x_j - \mu_x)/\sigma_x$

Dalla retta di regressione (o anche a occhio) si verifica che **i punti** di coordinate z_j e $x^*_j=(x_j-\mu_x)/\sigma_x$ **stanno sulla bisettrice** 1°-3°quadrante (m=1 e b=0)

Riepilogo

-- V.C. continue

-- media e varianza di V.C. continue

-- V.C. normale (equaz.+curva+proprietà)

-- V.C. normale standard e standardizzazione

-- $\Phi(z)$ per V.C. normale standard

-- calcoli di P da $\Phi(z)$

-- grafici di probabilità

VARIABILI CASUALI DISCRETE

(sono possibili valori/misure solo in punti discreti)

Funzione di Probabilità

La **funzione di probabilità (PMF)** di una variabile casuale discreta X, con possibili valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, è definita come

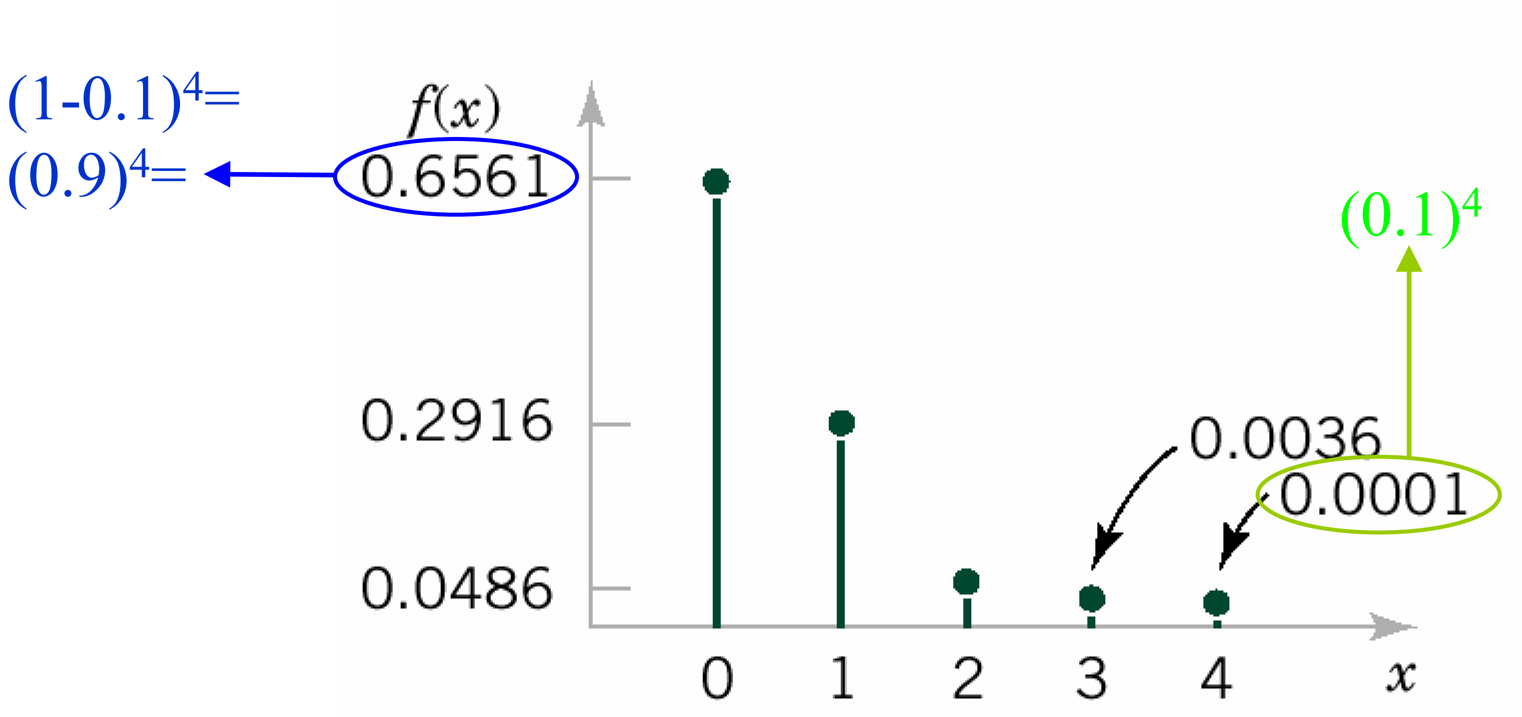
$$\boldsymbol{f(x_j)} = P(X = x_j)$$

È dunque una funzione <u>definita solo in un sottoinsieme finito di punti</u> $\{x_j\} \in \Re$.

A differenza della PDF <u>la funzione di probabilità è "puntualmente non nulla"</u>.

Esempio di funzione di probabilità

Si considera la **trasmissione di 4 bit**. Riportiamo la **probabilità di sbagliare *x* bit** per i possibili valori di x su 4 bit trasmessi. Sia X il numero di bit sbagliati e $f(x)$ la sua funzione di probabilità.



Nel problema si considera P(errore su 1 bit) = 0.1.

Il calcolo di $P(X=x_i)$ sarà effettuato con la distribuzione binomiale.

Funzione di Distribuzione Cumulativa

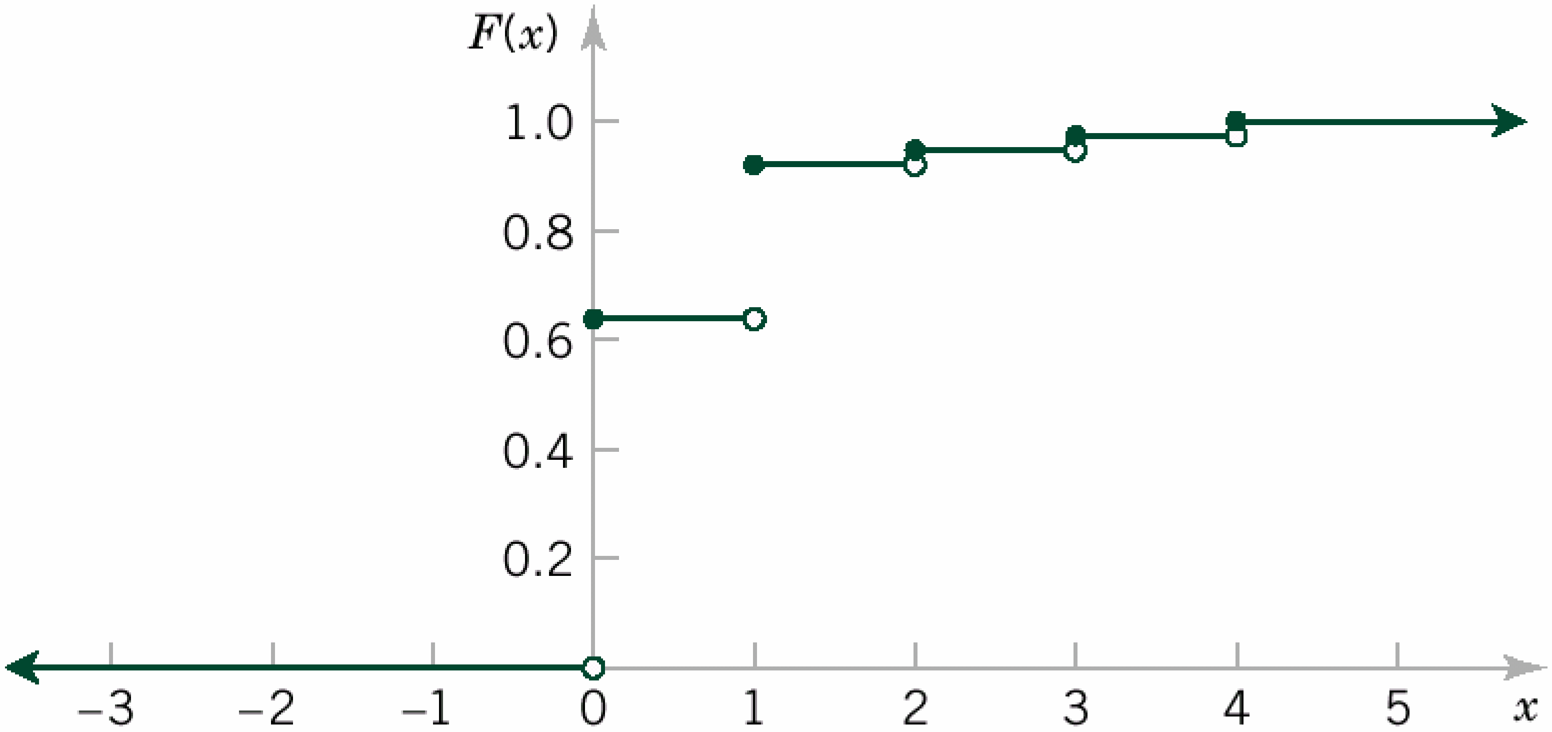
La **funzione di Distribuzione Cumulativa (CDF)** di una variabile casuale discreta X , è definita come

$$\boldsymbol{F(x)} = P(X \leq x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$$

$F(x)$ è <u>definita su tutto l'asse reale</u> e quindi anche per i valori di $x \neq x_j$ con $x \in \{\Re\}$; in particolare anche per valori $x < \min\{x_j\}$ e per $x > \max\{x_j\}$.

Es. di distribuzione cumulativa

Si riconsidera la trasmissione di 4 bit. Riportiamo la distribuzione cumulativa di X. Prima del primo evento possibile $F(x)=0$ e dopo l'ultimo evento possibile $F(x)=1$.



La funzione di distribuzione cumulativa è discontinua e l'ampiezza dei salti nei valori $x=x_j$ è pari a $P(X=x_j)$.

Valor Medio

Definizione:

Sia X una variabile casuale discreta con funzione di probabilità $f(x)$, per cui $P(X=x_j) = f(x_j)$.

Il **valor medio** o **valore atteso** di X, indicato con μ o $E(X)$, vale:

$$\mu \stackrel{\Delta}{=} E(X) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j f(x_j)$$

"BARICENTRO"

dove n è il numero di possibili valori di X.

NOTA: Σ per la PMF è l'analogo di ∫ per la PDF

Rispetto alla media campionaria (aritmetica) di n dati, adesso è la funzione di probabilità $\boldsymbol{f(x_j)}$ che "contiene il **fattore 1/*n***"

Varianza e Deviazione Standard

Definizione:

Sia X una variabile casuale discreta con funzione di probabilità $f(x)$, per cui $P(X=x_j) = f(x_j)$.

La **varianza** di X, indicata con σ^2 o $V(X)$, vale:

$$\sigma^2 \stackrel{\Delta}{=} V(X) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} f(x_i) - \mu^2$$

La **deviazione standard** σ di X vale $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(X)}$

Rispetto alla varianza campionaria (dell'intera popolazione) di n dati, adesso è la funzione di probabilità $\boldsymbol{f(x_j)}$ che "contiene il **fattore 1/*n***"

Esempio di stima della vendita che massimizza un profitto

Una indagine di mercato ha indicato che gli utili prevedibili per la vendita di un nuovo modello di PC portatile sono:
X nel caso A (PC 1.7GHz 14', HD-80GB, CD-combo, 1 USB, 3 kg)
Y nel caso B (PC 2.1GHz 15', HD-40GB, 4 USB, 1.5 kg)
Si stima che nel caso A l'utile sarà pari a X=3G$
mentre in B l'utile Y è incerto e vale 7G$ al 30% e 2G$ al 70%.

Conviene avviare la produzione del prodotto A o B?

Ovviamente si desidera massimizzare gli utili: nel caso A $E[X]$=3G$ mentre nel caso B $E[Y]=2\text{G\$}\cdot 0.7+7\text{G\$}\cdot 0.3=3.5\text{G\$}$.
Essendo $E[Y]>E[X]$ dovrebbe essere più conveniente produrre il PC di tipo B. Tuttavia, occorre tenere in considerazione che nel caso B $\sigma_Y=[(7-3.5)^2\cdot 0.3+(2-3.5)^2\cdot 0.7]^{1/2}=[5.25]^{1/2}\cong 2.3\text{G\$}$ che come possibile dispersione degli utili (in + o in - ...) influenza certamente la strategia decisionale dell'azienda produttrice.

Processi di Bernoulli

Un processo casuale con due soli risultati possibili è chiamato **processo di Bernoulli**. Ricordiamo che la parola **bi-nomio** indica due-nomi o casi possibili: qui “successo” o “insuccesso”.

La **distribuzione binomiale** è una funzione di probabilità notevole, che consente di calcolare <u>la probabilità di ottenere un certo numero di successi su un dato numero di prove</u>, sapendo che

- ogni prova è un processo di Bernoulli (esito bi-nomio)
- le prove sono indipendenti
- la probabilità di successo in ogni prova è costante

Per <u>“successo di una prova”</u> si intende l’ottenimento di un particolare esito della prova (uno tra i due soli possibili). Sarà un <u>“insuccesso”</u> il verificarsi in una prova dell’evento alternativo al successo.

Distribuzione Binomiale

Definizione:

Un esperimento che consiste in n prove ripetute tali che

1. ogni prova fornisce due soli risultati possibili , "successo" o "insuccesso"
2. le prove sono indipendenti
3. la probabilità p di successo in ogni prova è costante (ovviamente la probabilità q di un fallimento è $q = 1 - p$)

è chiamato **esperimento/processo binomiale (o di Bernoulli)**

La variabile casuale X pari al numero di successi su n prove ha una **distribuzione binomiale**, con funzione di probabilità:

$$\boxed{f(x) = b(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,\ldots,n \quad 0 \le p \le 1}$$

DIS CRE TA

Distribuzione Binomiale

Dimostrazione:

Essendo le singole prove indipendenti, la probabilità di ottenere una **precisa sequenza** di successi e fallimenti è pari al prodotto delle singole probabilità: quindi $\boldsymbol{p^x(1-p)^{n-x}}$, considerando x successi su n prove.

Se invece di una precisa sequenza di successi/insuccessi, ci interessa la probabilità di ottenere x successi, comunque distribuiti sulle n prove, si devono sommare le probabilità di ciascuna sequenza con x successi e (n-x) insuccessi. Il numero di tali sequenze è il **numero di combinazioni di n elementi di classe x**:

coeff. binomiale

nei due casi estremi, (x=0 e x=n) c'è una sola combinazione possibile

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$x = 0, 1, ..., n$

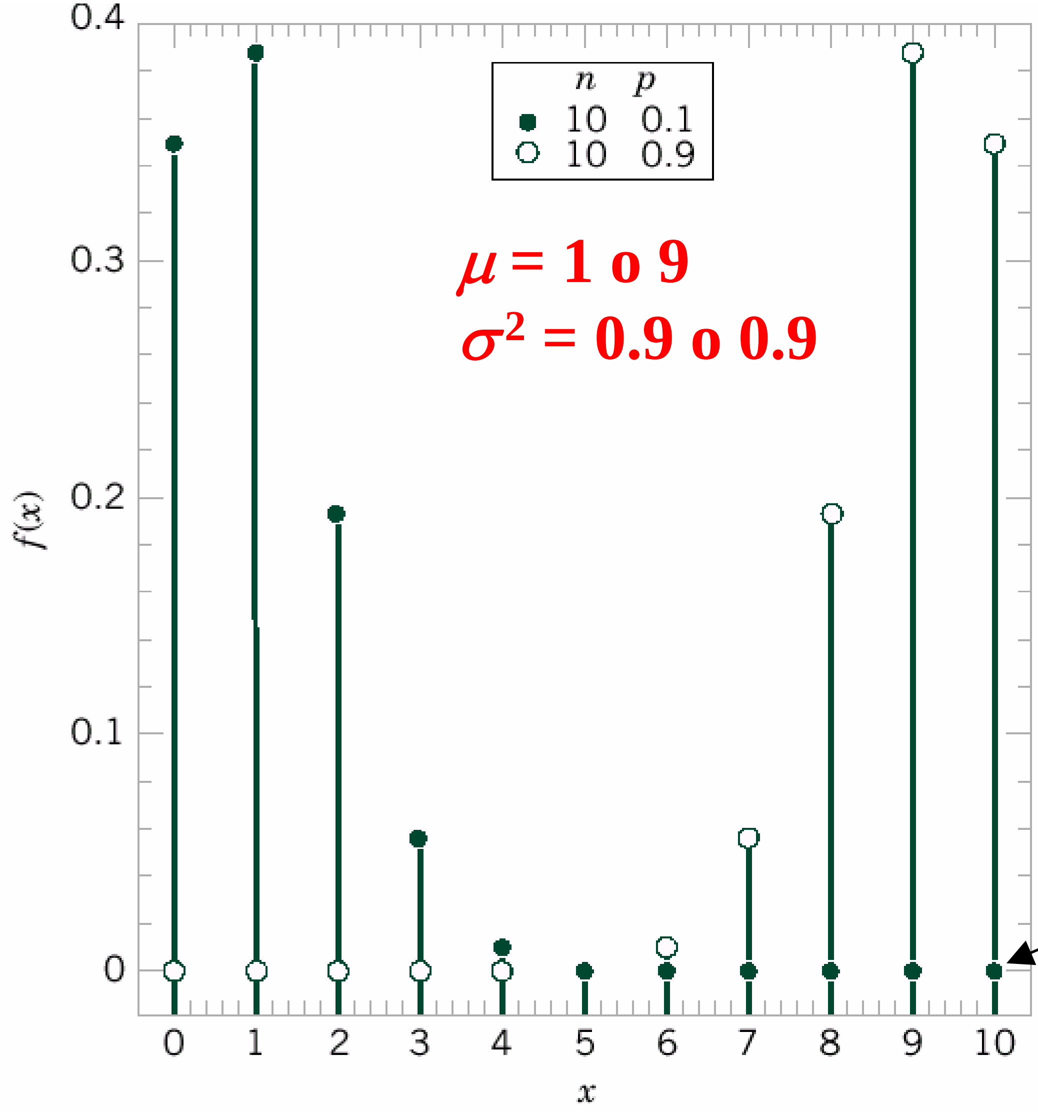
x è un intero!!!

Perciò la probabilità di avere x successi su n prove vale

$$P(\text{Numero di successi su } n \text{ prove} = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = b(x)$$

Esempio di distribuzione binomiale (p>>0.5 o p<<0.5)

la curva è...



$\mu = 1$ o 9

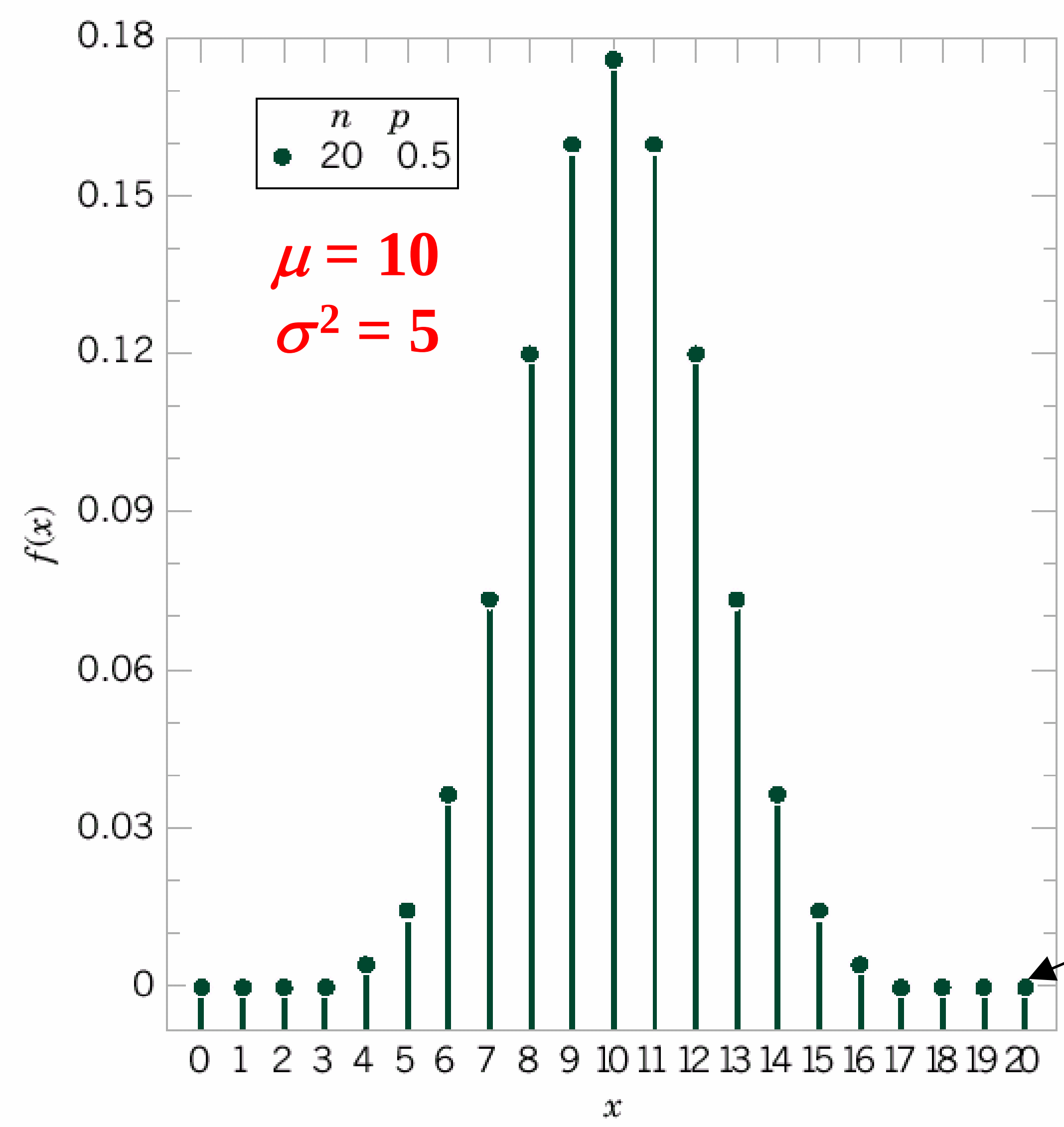
$\sigma^2 = 0.9$ o 0.9

ASIMMETRICA

$(0.1)^{10}=10^{-10}$

Esempio di distribuzione binomiale (p=0.5) [moneta?]

la curva è...



$\mu = 10$

$\sigma^2 = 5$

SIMMETRICA

$(0.5)^{20} \cong 10^{-6}$

Media e Varianza di una Distribuzione Binomiale

Se X è una variabile casuale binomiale, con parametri n e p (n è il numero di valori x_j possibili e p è la probabilità di successo), allora il valor medio di X vale:

$$\boldsymbol{\mu} = E(X) = \boldsymbol{np}$$

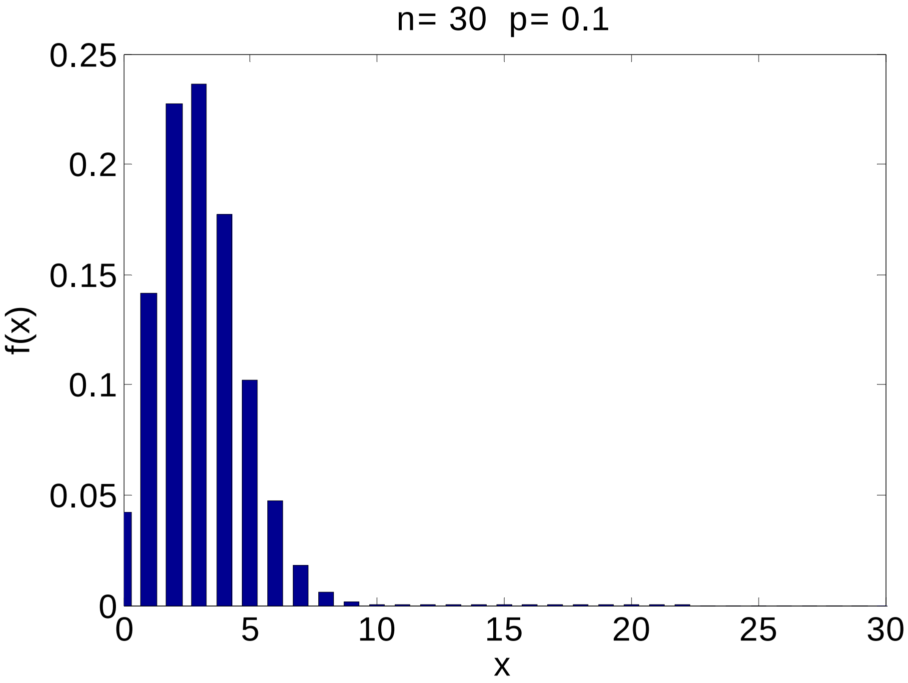
e la sua varianza vale:

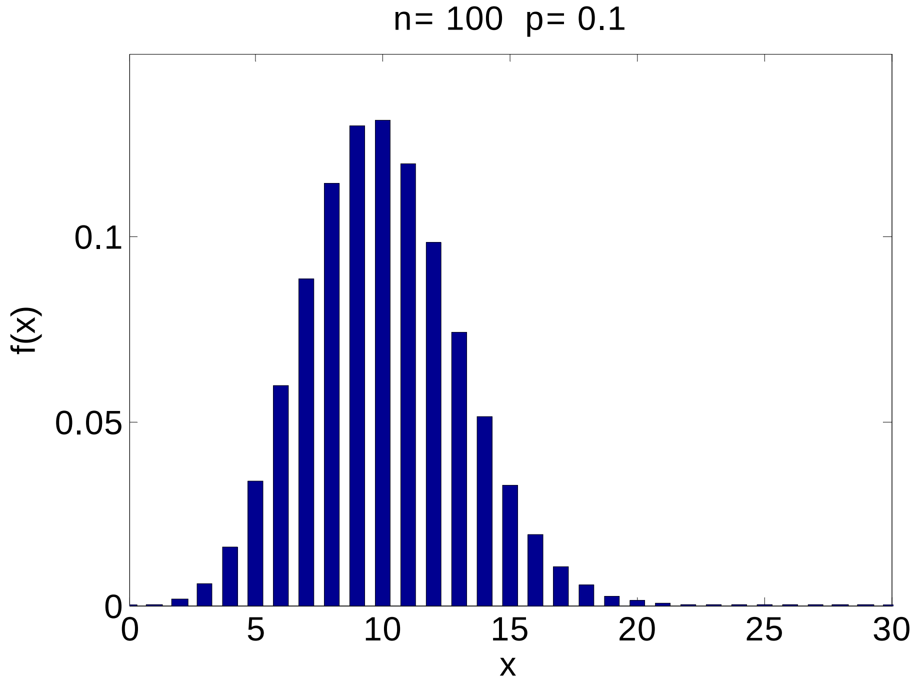
$$\boldsymbol{\sigma^2} = V(X) = \boldsymbol{np(1\text{-}p)} = npq = \mu q$$

sempre con $q = 1 - p$

Andamento della distribuzione binomiale per “n grande”

Al crescere di n la funzione di probabilità **assomiglia sempre di più a una “curva a campana”** centrata attorno al valor medio $\mu = np$ (la convergenza è tanto più rapida quanto più p è prossimo a 0.5).





La varianza è massima per p=1/2 ed è minima per $p \rightarrow 0$ o per $p \rightarrow 1$ mentre per la asimmetria avviene esattamente il contrario

Processi di Poisson

Sono processi che ad esempio hanno un'evoluzione temporale (**numero di eventi in un determinato intervallo** di tempo), che **segue una distribuzione di Poisson**.

- Il **numero di eventi che avvengono in un intervallo** (di tempo) è una variabile casuale discreta che spesso è ben modellizzata da una **distribuzione poissoniana**. L'avvenimento di un singolo evento è una variabile di Bernoulli: avviene/non-avviene.

- La **lunghezza dell'intervallo** (temporale) **tra gli eventi** è spesso modellizzabile con una **distribuzione esponenziale**.

Distribuzione di Poisson

Definizione:

Si assuma di avere eventi che avvengono casualmente in un intervallo. Se l'intervallo può essere diviso in sotto-intervalli di lunghezza (sempre uguale) abbastanza piccola per cui:

1. la probabilità di avere più di un evento nel sottointervallo è 0 [in ogni sottointervallo si avranno 0 oppure 1 eventi → Bernoulli];
2. la probabilità di avere un evento in un sottointervallo è la stessa per tutti i sottointervalli ed è proporzionale alla lunghezza del sottointervallo [p = costante e $p \propto$ lunghezza intervallo];
3. l'evento in ciascun sottointervallo è indipendente dagli altri

allora l'esperimento casuale è un **processo di Poisson**.

Se il numero medio di eventi nell'intervallo è λ ($\lambda > 0$), la variabile casuale X pari al numero di eventi in un sottointervallo ha una **distribuzione poissoniana** con parametro λ.

Distribuzione Poissoniana

La funzione di probabilità di per una VC X di Poisson vale

$$\boxed{f(x) = p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad \text{con } x = 0{,}1{,}2\ldots \qquad \text{e } \lambda > 0}$$

DIS CRE TA

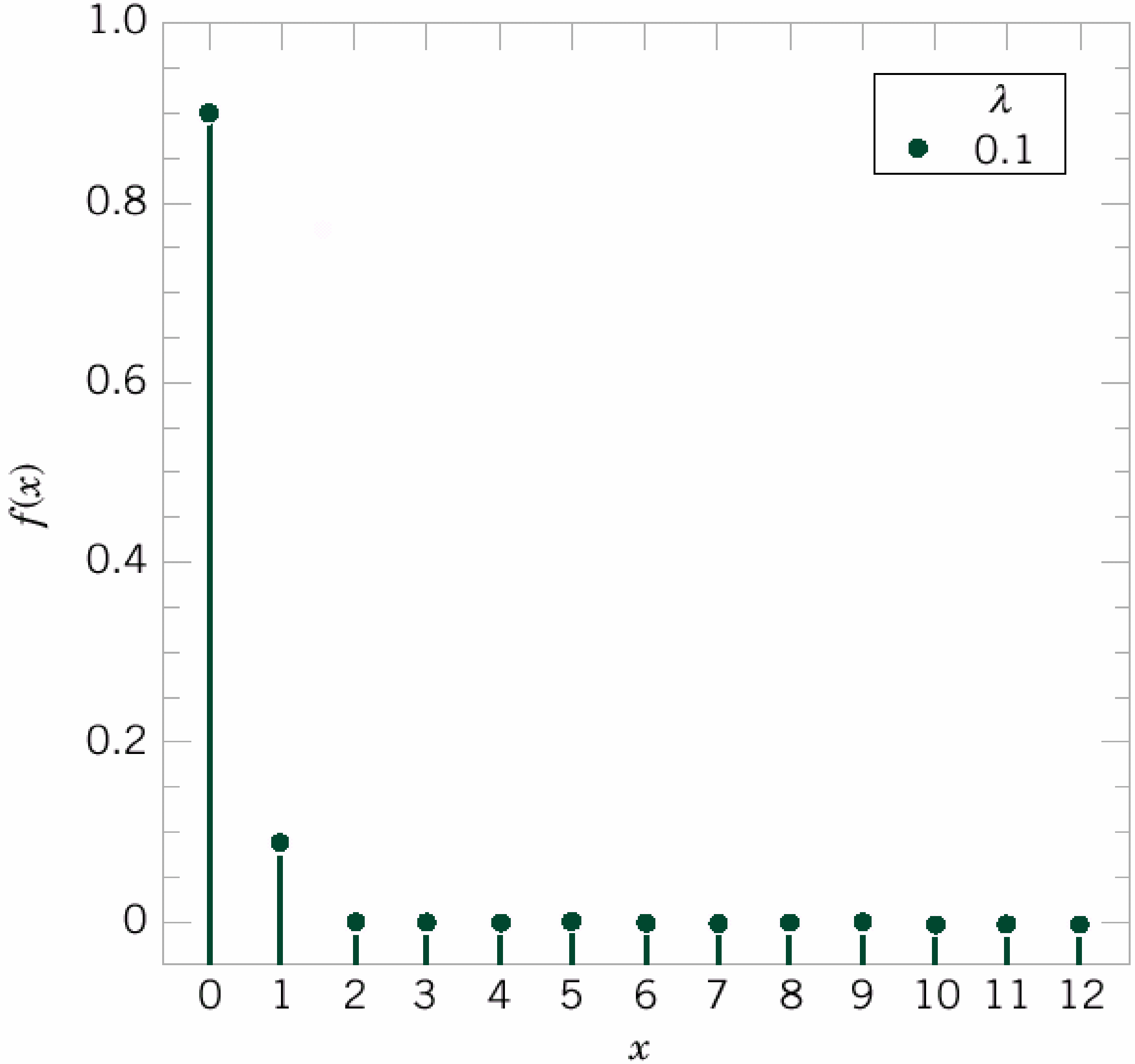
Se X è una variabile casuale poissoniana, con parametro λ, allora il suo

valor medio vale: $\mu = E(X) = \lambda$

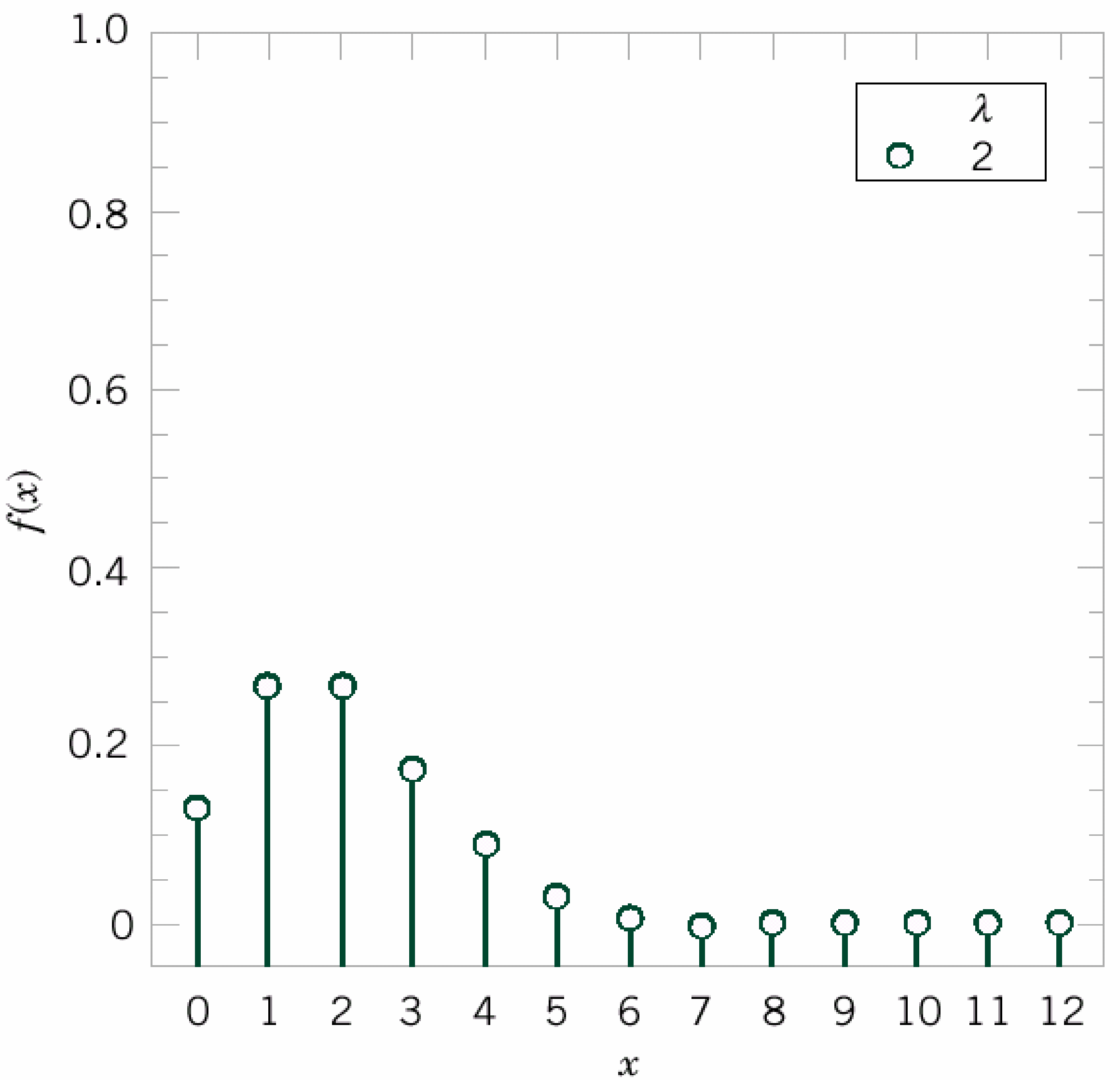
e la sua varianza vale: $\sigma^2 = V(X) = \lambda$

(le dimensioni di λ e di λ^2 e di $\lambda^{1/2}$ sono le stesse in quanto λ, essendo un numero di eventi, è un numero puro)

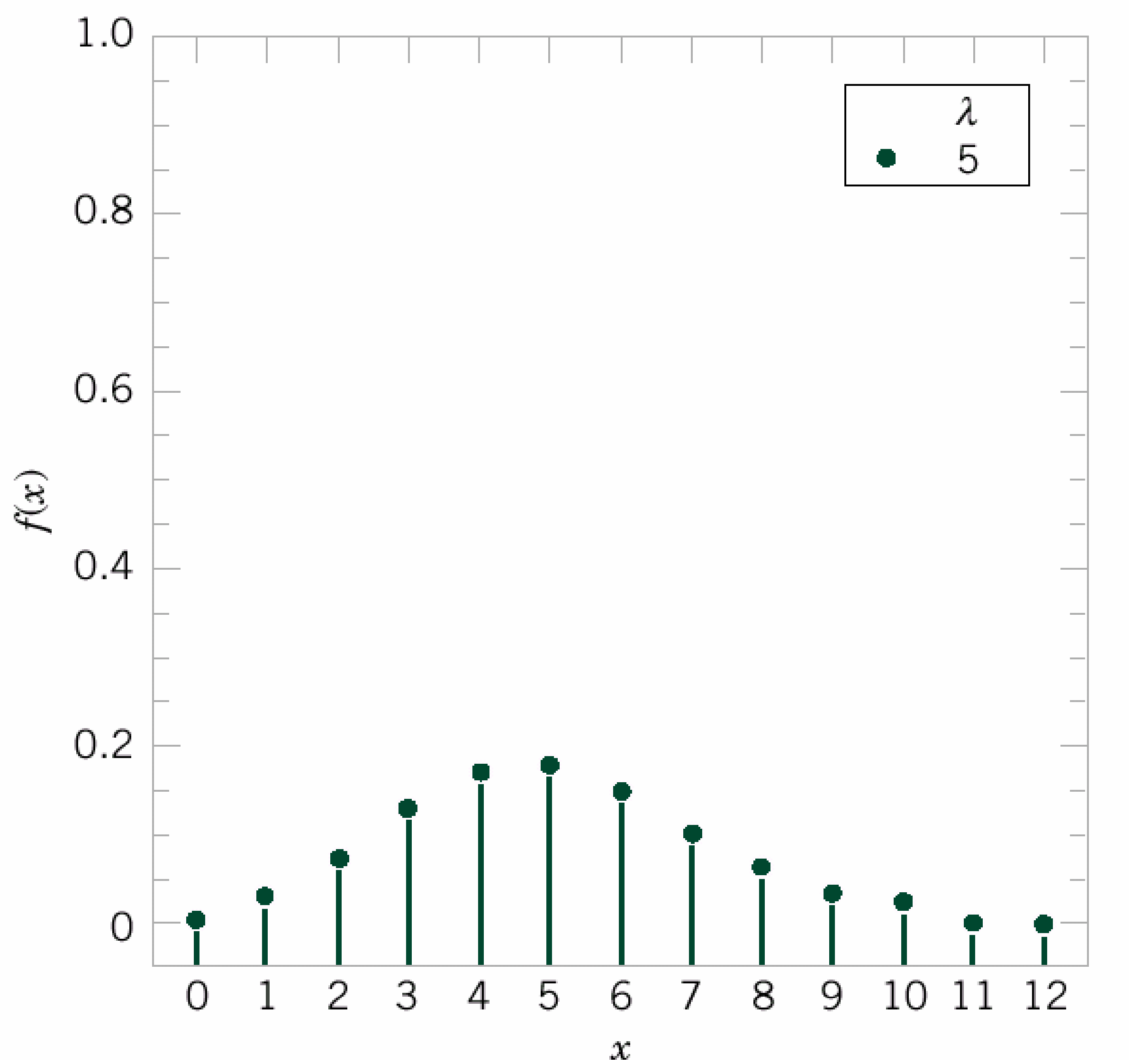
Esempio di distribuzione Poissoniana



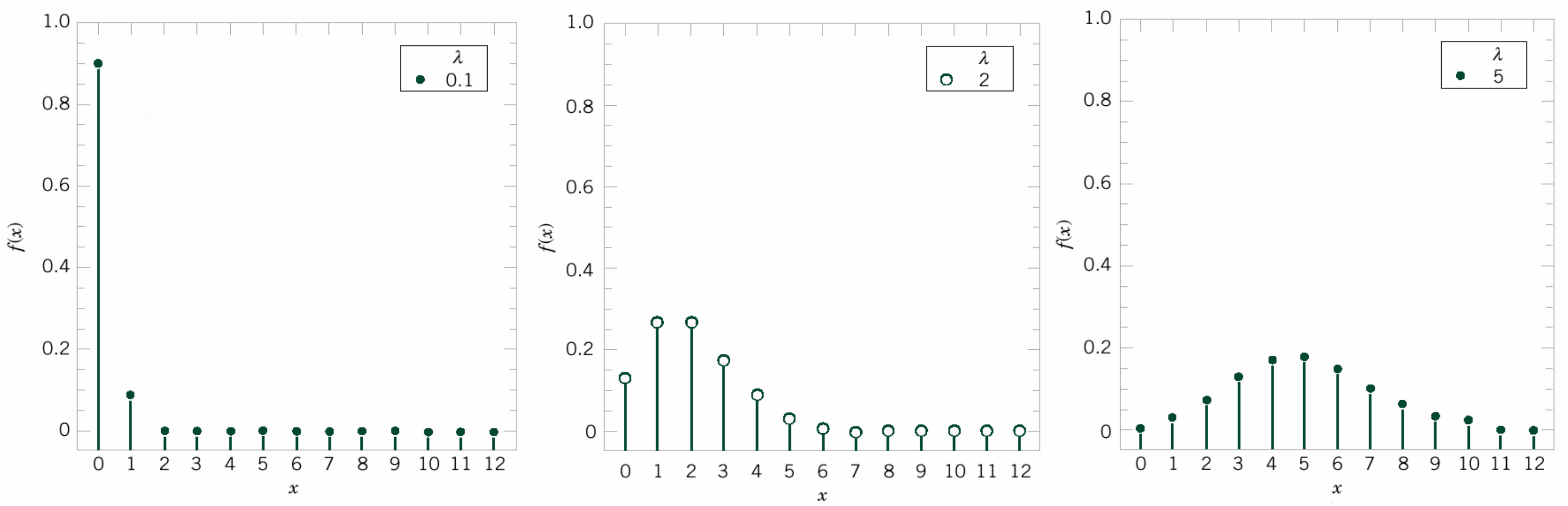
Esempio di distribuzione Poissoniana



Esempio di distribuzione Poissoniana



Andamento della Poissoniana



Per la **media λ che aumenta** la curva assume una **forma a campana** e mentre la <u>larghezza assoluta</u> ($\sigma=\lambda^{1/2}$) <u>aumenta</u>
la <u>larghezza normalizzata</u> al valor medio ($\sigma/\mu=\lambda^{-1/2}$) <u>diminuisce</u>

Per λ **> 5** la curva ha assunto una buona simmetria e **"gaussianità"**

Origine della distribuzione di Poisson

Consideriamo un evento con distribuzione di probabilità binomiale, in cui però il numero di estrazioni n sia molto grande, e la probabilità p sia molto piccola, e indichiamo con λ il valor medio $\mu(=np)$.

Se calcoliamo il <u>limite per $n\to\infty$ della distribuzione binomiale</u>, mantenendo **costante $np=\lambda$ finito** (ossia **con $p\to 0$**), otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{x!(n-x)!}\frac{(np)^x}{n^x}(1-p)^n\underbrace{(1-p)^{-x}}_{1}=$$

$$\overset{np=\lambda}{=}\frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n!}{(n-x)!\,n^x}}_{1}\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=\frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{-n}=$$

$$\overset{m=\frac{n}{\lambda}}{=}\frac{\lambda^x}{x!}\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{-\lambda}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$(1-\varepsilon)^n\cong(1+\varepsilon)^{-n}$ se $|\varepsilon|<<1$

Origine della distribuzione di Poisson (approssimazioni)

$$\lim_{p\to 0}(1-p)^x = (1)^x = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-x)!\,n^x} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-x+1)}^{x\text{ fattori, ciascuno con limite } = n}\cdot\cancel{(n-x)!}}{\cancel{(n-x)!}\,n^x} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n\cancel{-1})\ldots(n\cancel{-x+1})}{n^x} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x}{n^x} = 1$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$$

Distribuzione Esponenziale

Consideriamo un processo poissoniano con valor medio λt, dove t è l'intervallo (di tempo) considerato. Vogliamo ricavare la <u>distribuzione di probabilità dell'intervallo</u> (di tempo) <u>tra un evento ed il successivo</u>.
La probabilità di non avere eventi per un intervallo t vale

$$P(\text{Numero di eventi} = 0) = f(0) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = \mathrm{e}^{-\lambda t} = P(T > t)$$

Questa probabilità corrisponde alla probabilità che la distanza T tra un evento e il successivo sia $>t$. Pertanto la distribuzione cumulativa è

$$F(t) = P(T \le t) = 1 - P(T > t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

La funzione densità di probabilità non è altro che la derivata della distribuzione cumulativa, per cui

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Distribuzione Esponenziale

La variabile casuale X (VC continua) pari alla distanza tra due successivi eventi di un processo poissoniano, con valor medio λ, ha una **distribuzione esponenziale** con parametro λ.
La funzione densità di probabilità di X (T nel lucido precedente) è

$$\boxed{f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \quad \text{per } 0 \le x < \infty \quad \text{e} \;\; \lambda > 0}$$

CON TI NUA

il suo valor medio vale:

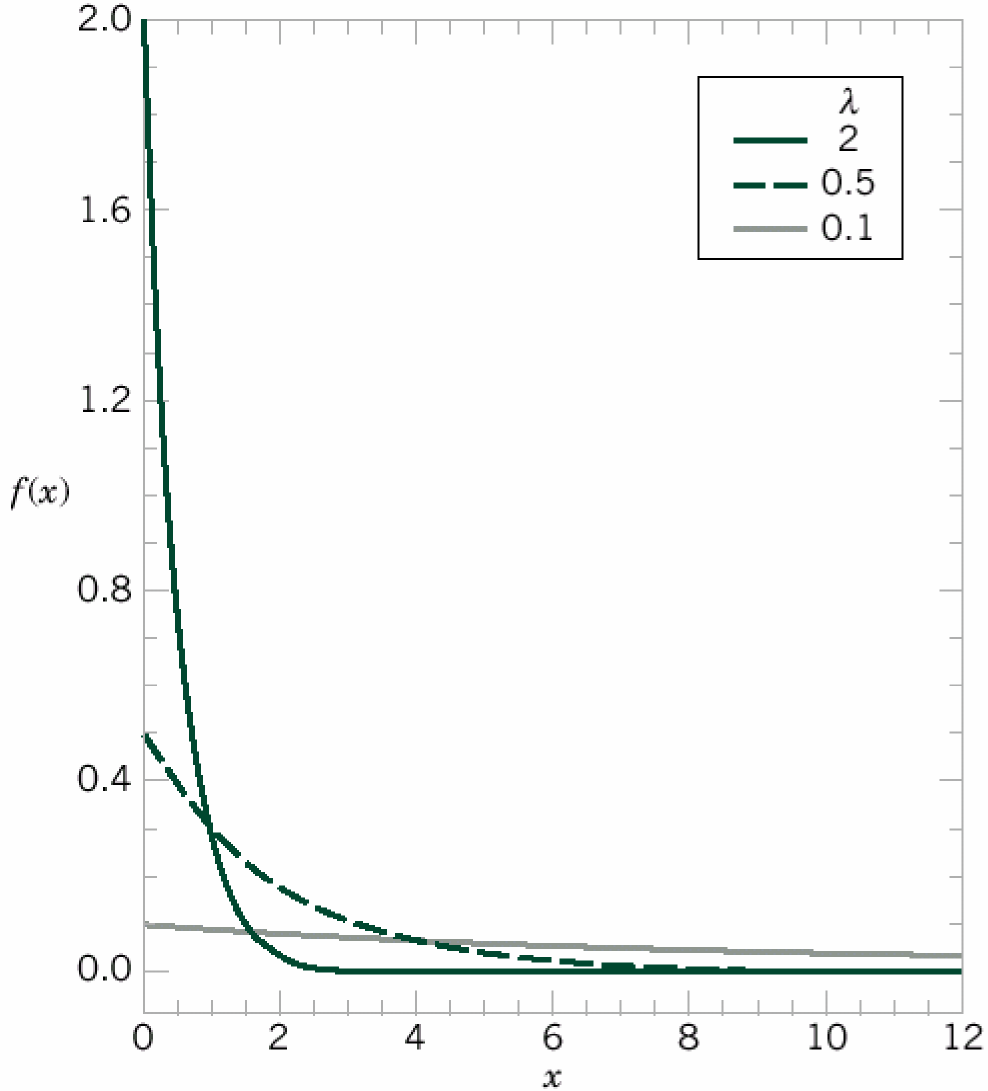
$$\mu = E(X) = 1/\lambda$$

e la sua varianza vale:

$$\sigma^2 = V(X) = 1/\lambda^2$$

Per $x \rightarrow 0$ si ha che $f(x) \rightarrow \lambda$. Quando la media $1/\lambda$ aumenta, la larghezza assoluta ($\sigma = 1/\lambda$) aumenta
la larghezza normalizzata ($\sigma/\mu = 1$) rimane costante

Esempi di distribuzione Esponenziale



Proprietà della distribuzione esponenziale

- La distribuzione di probabilità non dipende dall'istante di inizio considerato
- Mancanza totale di memoria: quello che succederà nel futuro non dipende minimamente da quello che è già successo (deriva direttamente dall'ipotesi di indipendenza degli eventi nei singoli sottointervalli del processo poissoniano)

Approssimazione normale della distribuzione binomiale

Quando il numero di eventi diventa molto grande, il calcolo della distribuzione di probabilità binomiale può essere particolarmente pesante (per i fattoriali che assumono valori altissimi).

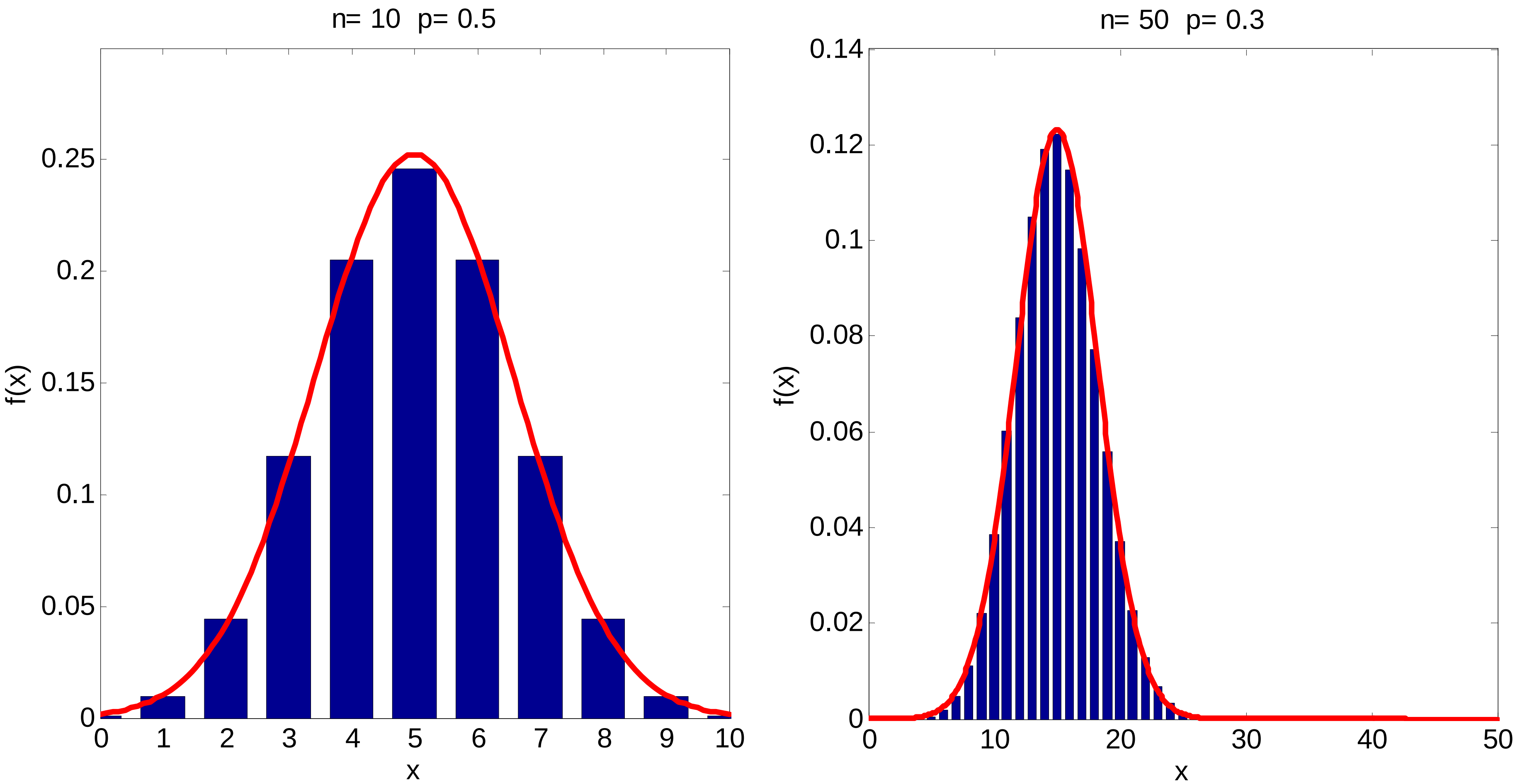
In questi casi può essere utile approssimare la distribuzione discreta con una distribuzione continua di tipo normale. Ricordando che per una distribuzione binomiale $E(X)=np$ e $V(X)=np(1-p)$, la variabile

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

approssima una variabile casuale normale standard. (per $np>5$ e $n(1-p)>5$)

Quindi **le probabilità calcolate da Z (gaussiana) e dalla $\Phi(z)$ possono essere usate per approssimare le probabilità di X (binomiale)**.

Approssimazione normale della distribuzione binomiale



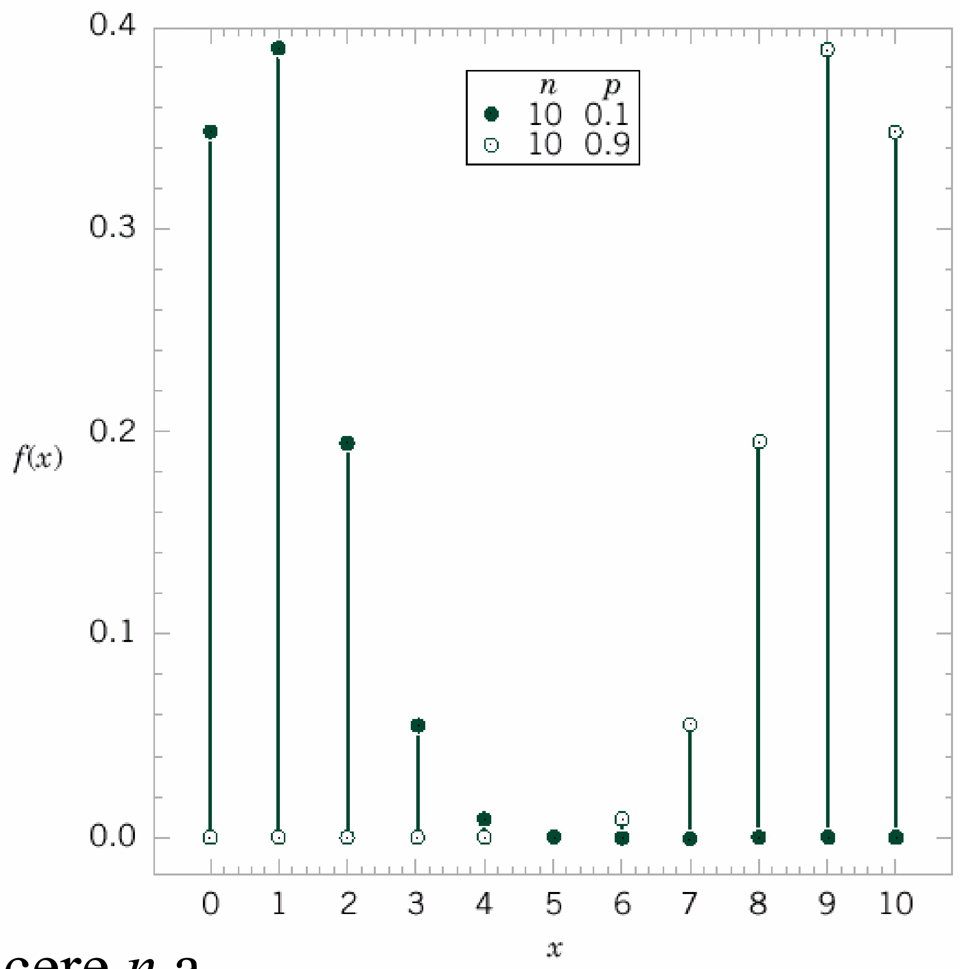
Approssimazione normale della distribuzione binomiale

L'approssimazione gaussiana vale solo se la distribuzione binomiale non è troppo asimmetrica.
La distribuzione binomiale è piuttosto simmetrica per valori di n che siano grandi rispetto a $1/p$ e anche rispetto a $1/(1-p)$:

l'approssimazione è valida se

$$np > 5 \ \text{ e } \ n(1-p) > 5$$

(converge prima se $p \cong 0.5$)



A p fissato, si può sempre far crescere n a sufficienza per soddisfare l'approssimazione.

Approssimazione normale della distribuzione poissoniana

Come per la distribuzione binomiale, anche la distribuzione di Poisson, "per n grande", può essere approssimata dalla distribuzione normale.

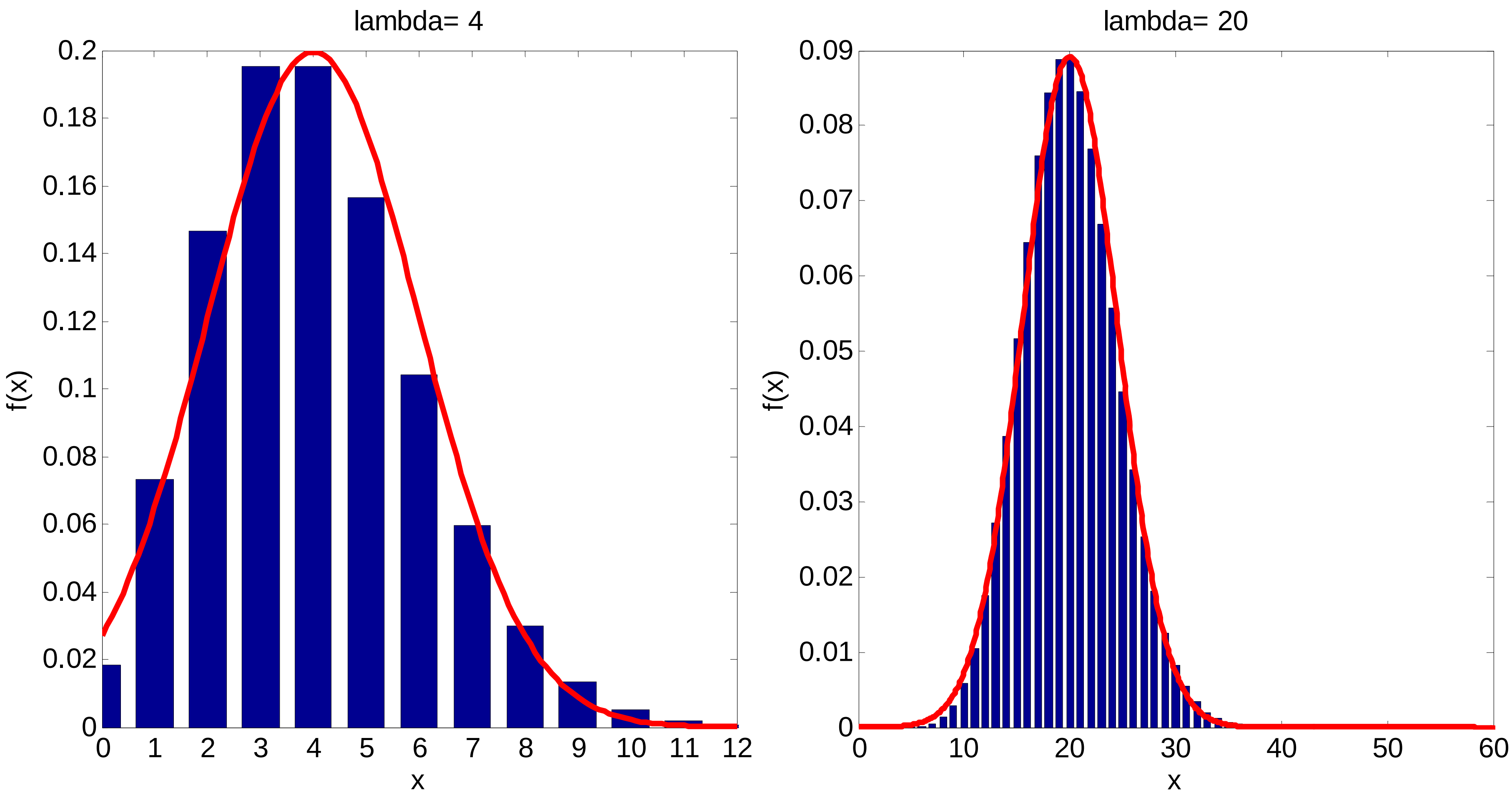
Ricordando che per una distribuzione poissoniana $E(X)=\lambda$ e $V(X)=\lambda$, la variabile

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

è una buona approssimazione di una variabile casuale normale standard, nell'ipotesi che λ sia abbastanza grande ("$\lambda > 5$").

Di conseguenza le probabilità calcolate da Z possono essere usate per approssimare le probabilità di X poissoniana quando λ è grande (o, al solito, quando $n \rightarrow \infty$)

Approssimazione normale della distribuzione poissoniana



Riepilogo

-- V.C. discrete

-- media e varianza di V.C. discrete

-- processi di Bernulli

-- distribuzione binomiale

-- processi di Poisson

-- distribuzione esponenziale

-- approssimazione normale per la binomiale

-- approssimazione normale per la poissoniana

Più di una variabile casuale: distribuzioni congiunte e indipendenza statistica

Distribuzioni congiunte

Consideriamo due variabili casuali. Spesso queste possono essere legate da una mutua dipendenza, più o meno deterministica, che ci costringe a considerarle contemporaneamente.

Questo significa che le probabilità associate a una variabile dipendono dalle ipotesi fatte sull'altra. Definiamo in questo caso una **funzione densità di probabilità congiunta**.

Ad esempio, per due VC X e Y, $f(x,y)$ è tale che

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Si può definire anche una **funzione di probabilità congiunta** per variabili discrete:

$$f(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

Distribuzioni congiunte

Esempio: lo spessore Y ed il diametro X di un disco pressofuso.
Queste sono variabili casuali, che però dipendono entrambe dalla pressione di iniezione del fuso (aumentano all'aumentare della pressione).

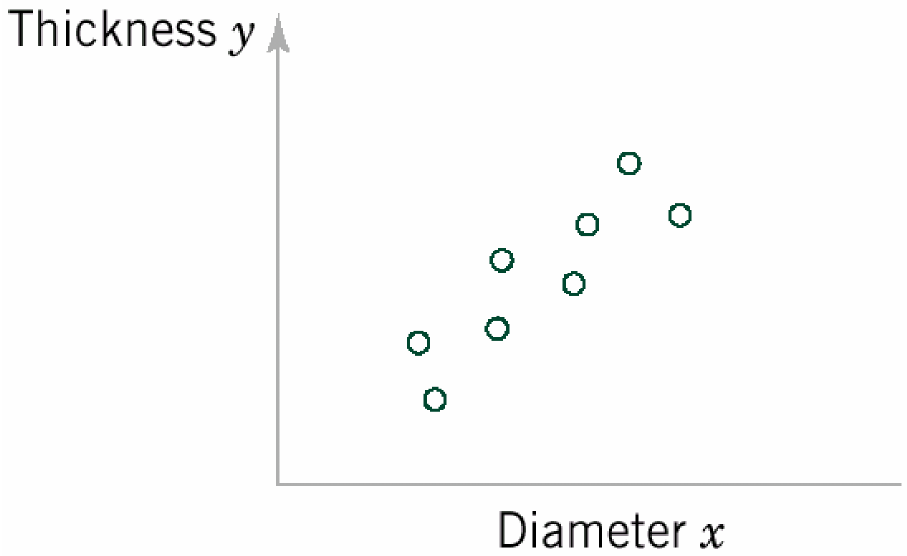
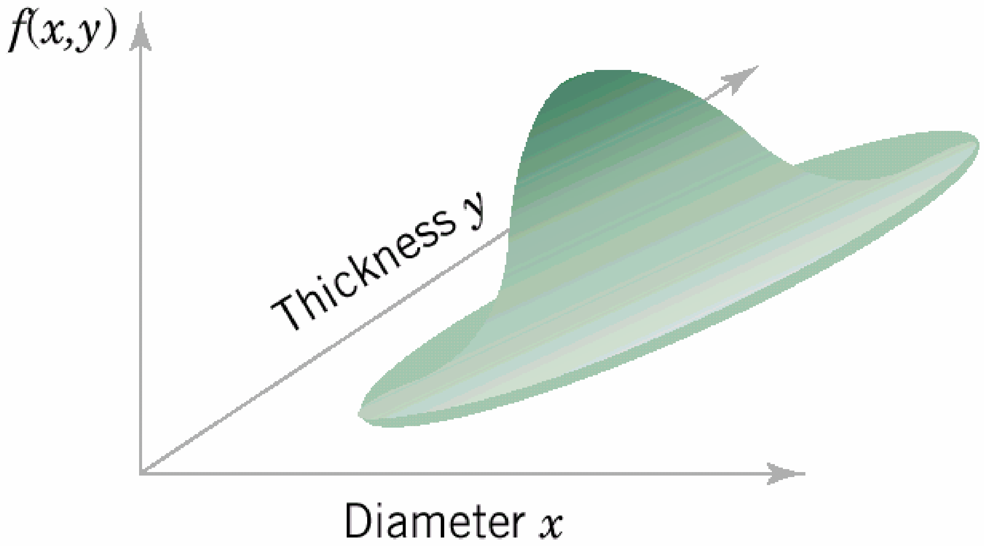
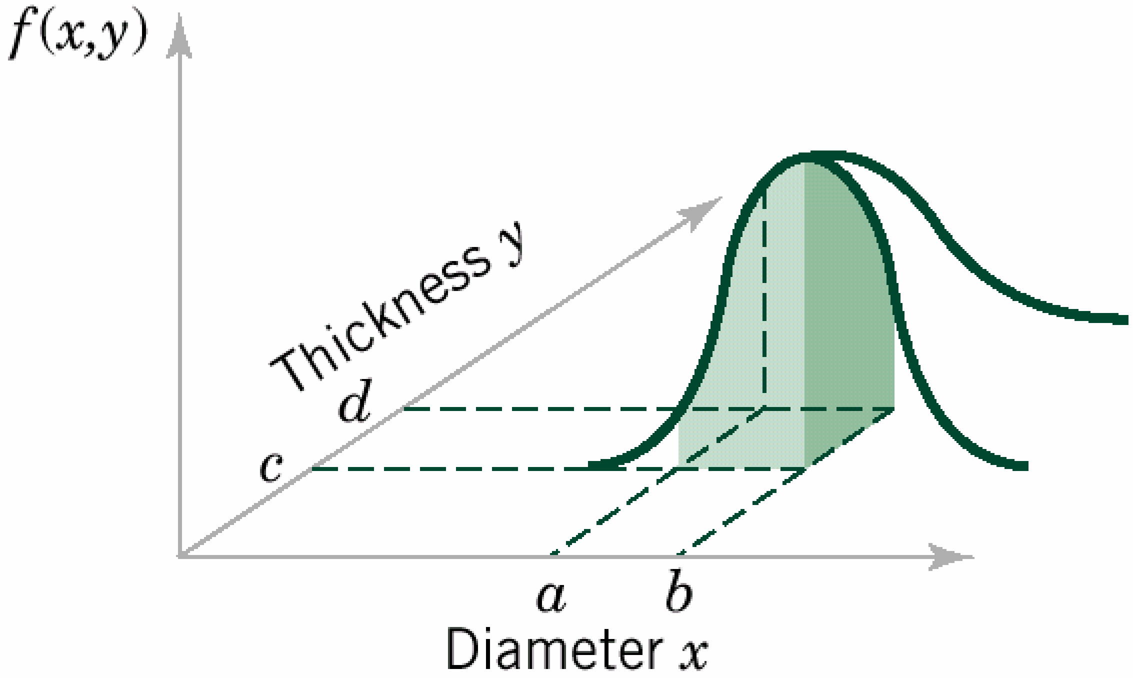


Diagramma di dispersione X-Y



Funzione densità di probabilità congiunta tra X e Y

Distribuzioni congiunte



La probabilità di appartenenza a una data regione, intervalli di valori Δx e Δy, corrisponde al volume racchiuso da $f(x,y)$ al di sopra della regione stessa

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Naturalmente $P(-\infty < X < +\infty, -\infty < Y < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \equiv 1$

Indipendenza statistica

Definizione:

Le variabili casuali $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono (statisticamente) **indipendenti** se

$$P(X_1 \in E_1, X_2 \in E_2, \ldots, X_n \in E_n) = P(X_1 \in E_1) \cdot P(X_2 \in E_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in E_n)$$

Per **ogni** insieme $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

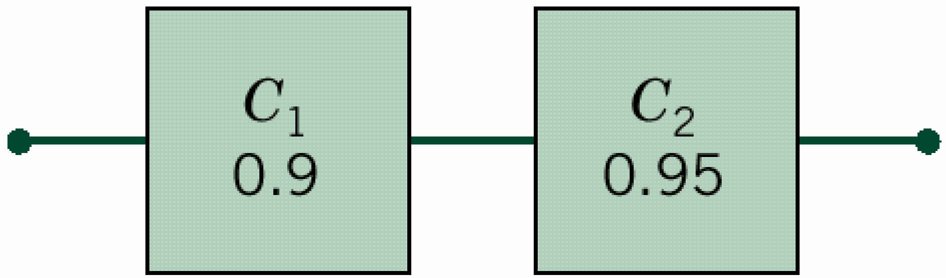
Una definizione equivalente è che la funzione densità di probabilità congiunta è uguale al prodotto delle funzioni densità di probabilità:

$f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$ nel caso di 2 VC statisticamente indipendenti

Sistemi in serie

Supponiamo di avere 2 sottosistemi, che per garantire il corretto funzionamento del sistema generale debbano funzionare entrambi. Questi **sottosistemi** sono detti **"in serie"**.

Se le probabilità di funzionamento dei singoli sottosistemi sono indipendenti, allora la probabilità di funzionamento del sistema è il prodotto delle singole probabilità.



$$P(C_1, C_2) = P(C_1)P(C_2) = 0.855$$

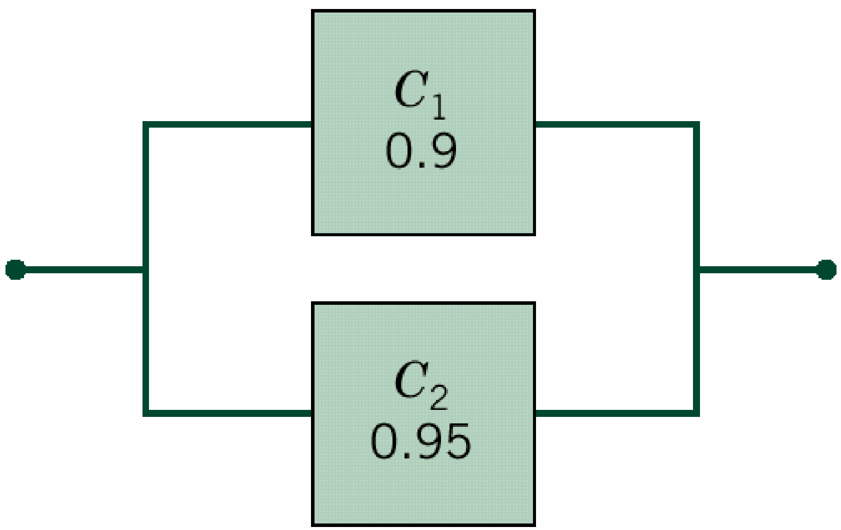
Ovviamente per un sistema in serie $P=P(C_1,\ldots,C_n) \leq \min\{P(C_i)\}$

(**"è l'anello più debole che determina la debolezza della catena"**)

Sistemi in parallelo

Supponiamo che per il funzionamento del sistema generale ora basti il funzionamento di almeno uno dei sottosistemi. Questi **sottoinsiemi** sono detti **"in parallelo".** Il **sistema** è **ridondante**.

In questo caso la probabilità di funzionamento del sistema si ottiene ragionando per negazione: probabilità di successo=1-probabilità di fallimento di tutti, che, se le variabili sono indipendenti, è uguale al prodotto delle probabilità di fallimento dei singoli blocchi



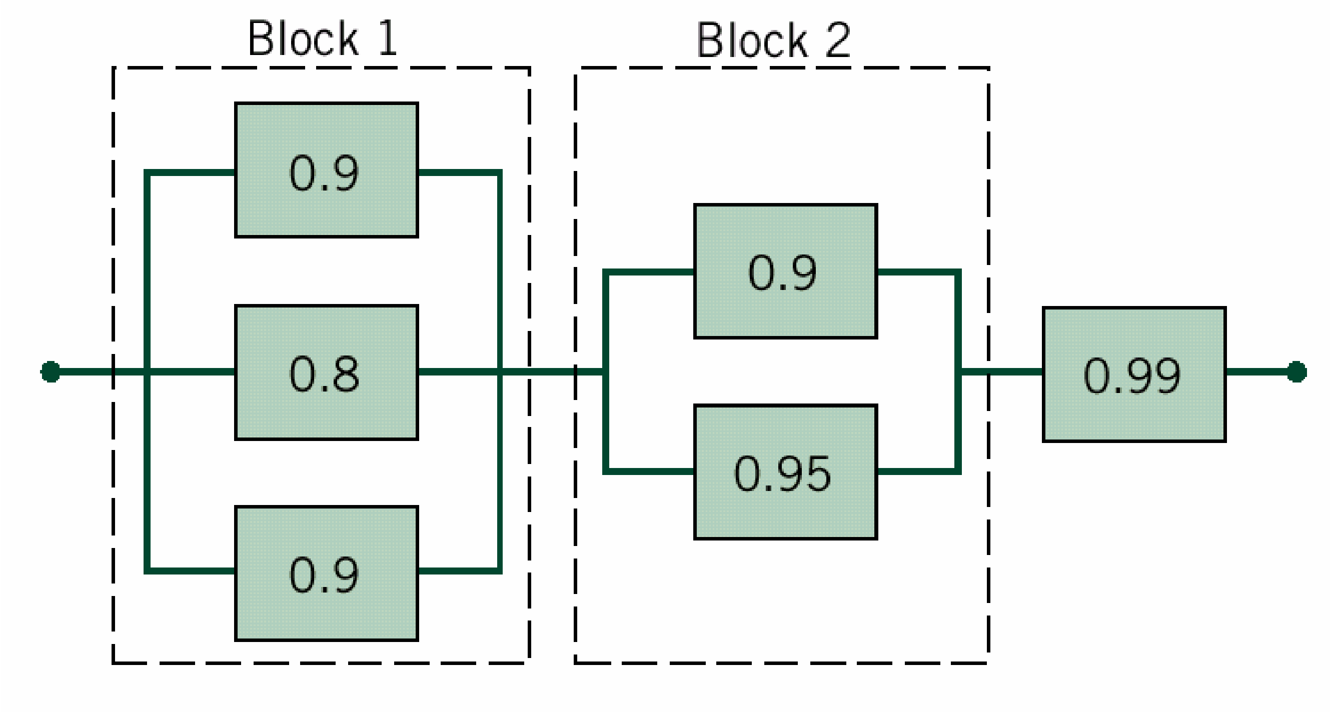
$$P(C_1 \text{ or } C_2) = 1 - P(C_1', C_2') =$$
$$= 1 - P(C_1')P(C_2') =$$
$$= 1 - [1 - P(C_1)][1 - P(C_2)] =$$
$$= P(C_1) + P(C_2) - P(C_1)P(C_2) = 0.955$$

Ovviamente per un sistema in parallelo $P = P(C_1 \text{or} \ldots \text{or } C_n) \geq \max\{P(C_i)\}$

(con più catene in parallelo, la forza della catena risultante è > della catena più forte)

Sistemi generici

Per il calcolo di probabilità di successo di sistemi generici, spesso è possibile ricondursi a una sequenza di sistemi "serie" e "parallelo"



$$\begin{aligned} P(sistema) &= P(Block1)\cdot P(Block2)\cdot 0.99 = \\ &= \left[1-(1-0.9)(1-0.8)(1-0.9)\right]\cdot\left[1-(1-0.9)(1-0.95)\right]\cdot 0.99 = \\ &= \left[0.998\right]\cdot\left[0.995\right]\cdot 0.99 = 0.983 \end{aligned}$$

Campioni casuali e statistiche

Definizioni:

Un insieme di variabili casuali indipendenti $X_1, X_2, \ldots, X_n$ con la stessa distribuzione di probabilità è chiamato **campione casuale**.

Una **statistica** è una funzione delle variabili casuali in un campione casuale (ad esempio il valor medio, la varianza, lo scarto quadratico medio…).

La distribuzione di probabilità di una statistica è chiamata la sua **distribuzione di campionamento**.

Ad es. **la media campionaria è una statistica** (essendo una funzione di VC in un campione) e risulta a sua volta essere una VC con la propria PDF: $f(\overline{x})$ detta distribuzione di campionamento della media

Operazioni elementari su una variabile casuale
(somma e prodotto per una costante)

Se X è una variabile casuale con $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$

e la variabile Y è data da $\boldsymbol{Y = X + b}$ (con b costante qualsiasi)

allora $\boldsymbol{E(Y) = \mu + b}$ e $\boldsymbol{V(Y) = \sigma^2}$

Se invece consideriamo $\boldsymbol{W = c\,X}$ (con c costante qualsiasi)

allora $\boldsymbol{E(W) = c\mu}$ e $\boldsymbol{V(\mathrm{W}) = c^2\sigma^2}$

Distribuzioni di campionamento di combinazioni linearivdi VC

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono variabili casuali con $E(X_i) = \mu_i$ e $V(X_i) = \sigma_i^2$ e la variabile Y è data da

$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots. + c_n X_n \qquad \text{(combin. lin. delle } X_i\text{)}$$

allora

$$E(Y) = c_1\,\mu_1 + c_2\,\mu_2 + \ldots. + c_n\,\mu_n \qquad (E \text{ è un operatore lineare})$$

Inoltre se $X_1, X_2, \ldots, X_\mathrm{n}$ sono variabili casuali **indipendenti**, allora

$$V(Y) = c_1{}^2\sigma_1{}^2 + c_2{}^2\sigma_2{}^2 + \ldots. + c_n{}^2\sigma_n{}^2 \quad (V \text{ è un operatore quadratico})$$

Inoltre, se $\boldsymbol{X_1, X_2, \ldots, X_n}$ sono variabili casuali **normali e indipendenti**, allora anche Y è una variabile normale

Esempio: la media campionaria

Supponiamo di prendere un campione casuale di dimensione n da una popolazione normale con media μ e varianza σ^2

allora **la media campionaria** (somma di VC gaussiane)

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

ha una distribuzione normale con media

$$E(\bar{X}) = \frac{\mu + \mu + \ldots + \mu}{n} = \mu$$

$\equiv \mu$

e varianza

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$< \sigma^2$ e inoltre
$\rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$

"A patto di fare 'tante' medie, la varianza diventa piccola a piacere"

Teorema del limite centrale

Siano $\boldsymbol{X_i}$ n variabili caratterizzate da distribuzioni qualsiasi, **statisticamente indipendenti**, e $\boldsymbol{Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_n X_n}$

La distribuzione di Y è **approssimativamente normale**,

con valore atteso $$\mu_Y = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_{X_i}$$

e varianza $$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_{X_i}^2$$

se $\sigma_Y^2 >> c_i^2 \sigma_{X_i}^2$ per ogni i

Y è approssimativamente normale se dovuta a **tante cause indipendenti** di cui nessuna è dominante (come varianza/allargamento)

Teorema del limite centrale per la media campionaria

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ è un campione casuale di dimensione n preso da una popolazione con media μ e varianza σ^2, e se $\overline{X}$ è **la VC media campionaria**, allora la forma limite per $n \to \infty$ della distribuzione di

$$\boxed{Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}}$$

è una **distribuzione normale standard**.

Quindi $\quad \lim_{n\to\infty}\left[E(\overline{X})\right] = \mu \quad$ e $\quad \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{V(\overline{X})}\right] = \sigma_{\overline{X}}^2 = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Considerazioni sul teorema del limite centrale

$n \to \infty$ VC $\bar{X}$

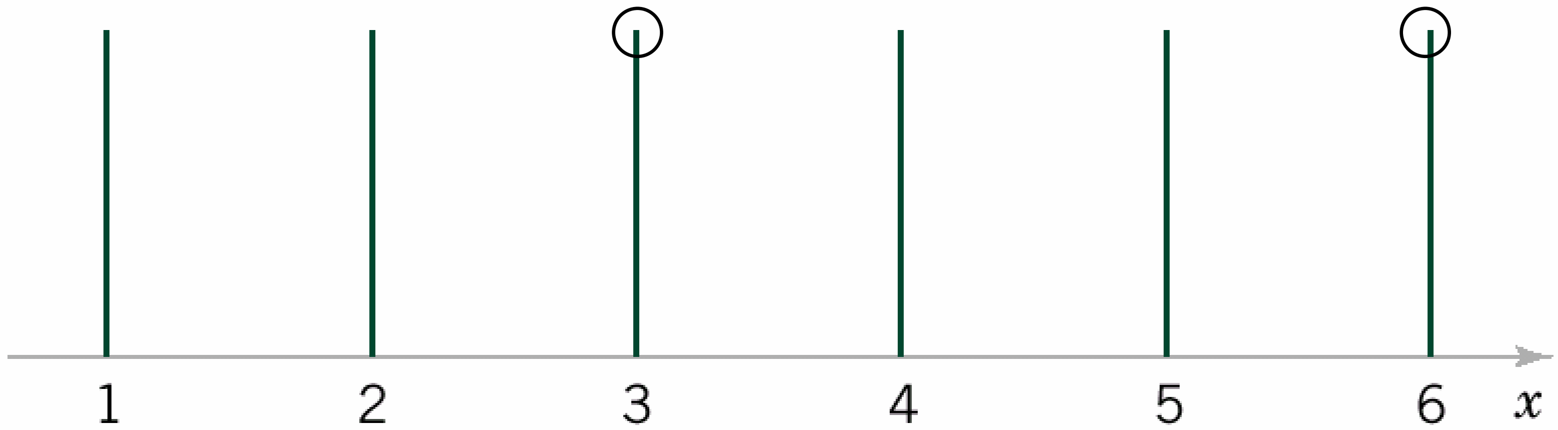
Al crescere di *n* **il valor medio campionario** (che è ancora una VC) **tende ad assumere una distribuzione normale**, indipendentemente dal tipo di distribuzione da cui si è partiti. La distribuzione di partenza influisce però sulla velocità di convergenza: per distribuzioni continue e simmetriche può bastare $n = 4$ o 5, mentre per PDF particolari (distribuzioni "strane") può essere necessario un numero più grande di dati.

Tipicamente per $n > 30$ **l'approssimazione normale alla PDF della media campionaria è ben soddisfatta** indipendentemente dalla forma della distribuzione di probabilità della variabile campionata.

Distribuzione di probabilità del valor medio di n lanci di dado

PDF **Uni**forme

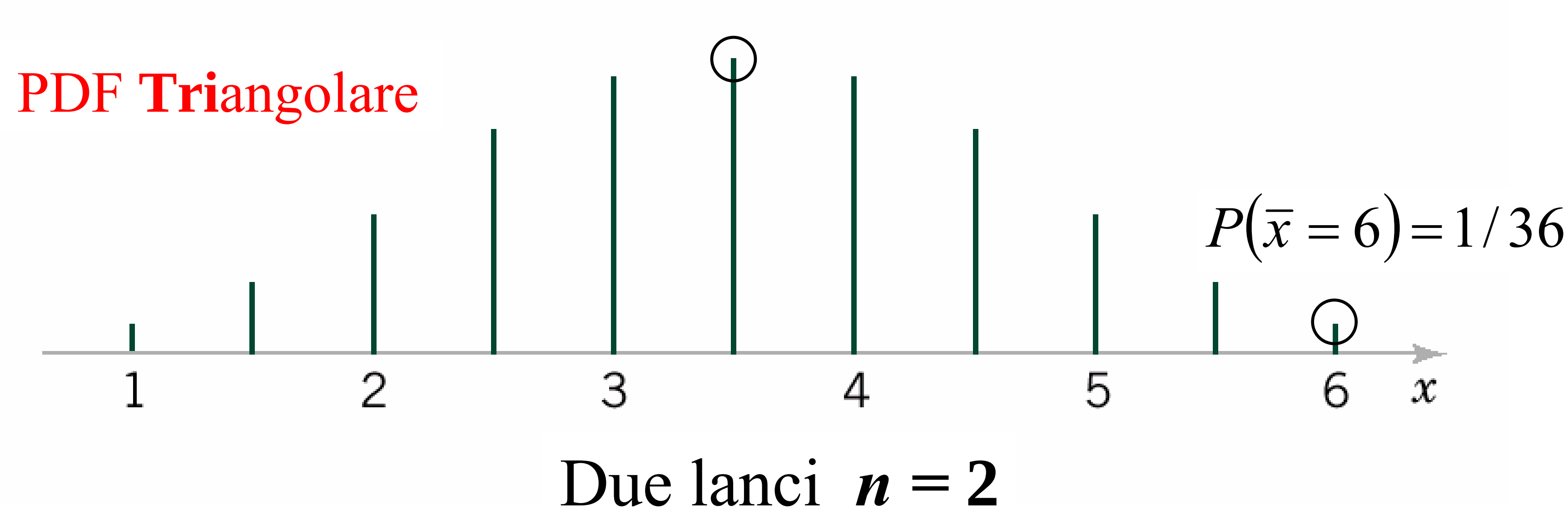
$P(\bar{x}=3)=1/6$ $\quad$ $P(\bar{x}=6)=1/6$



Un lancio $\boldsymbol{n=1}$

Distribuzione di probabilità del valor medio di n lanci di dado

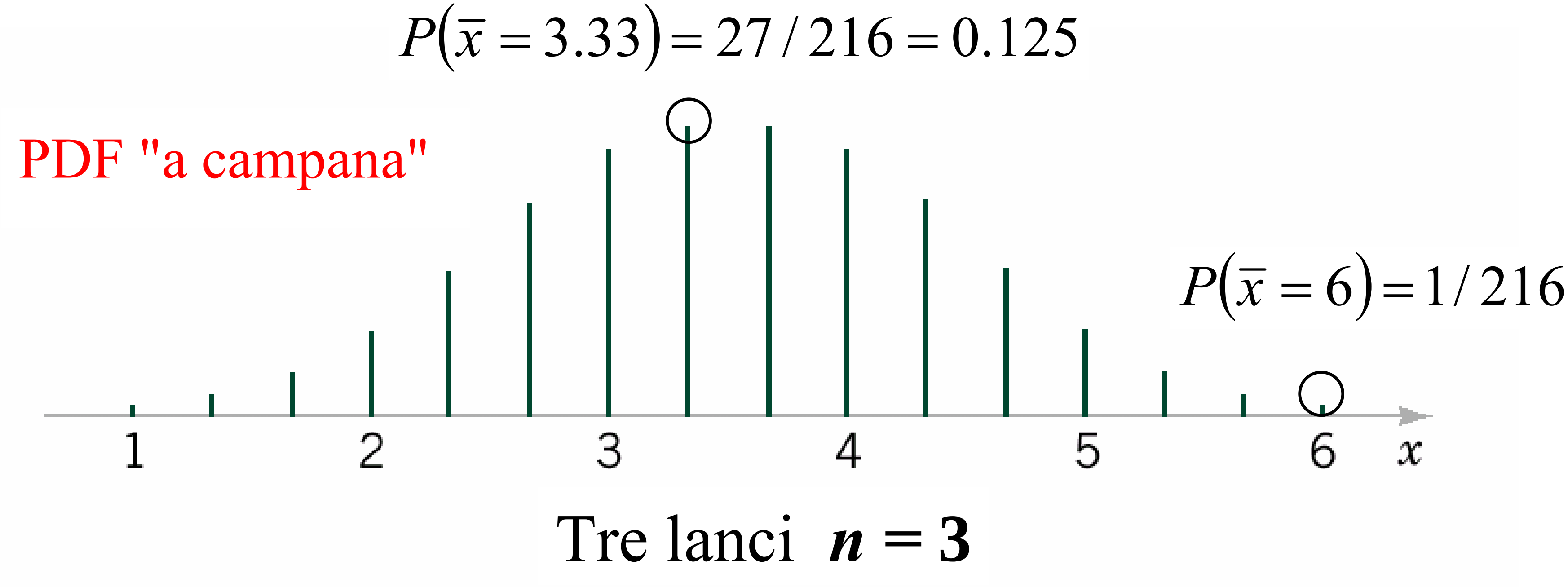
$$P(\bar{x} = 3.5) = 6/36 = 1/6$$



La somma dei due dadi è $S=d_1+d_2$.

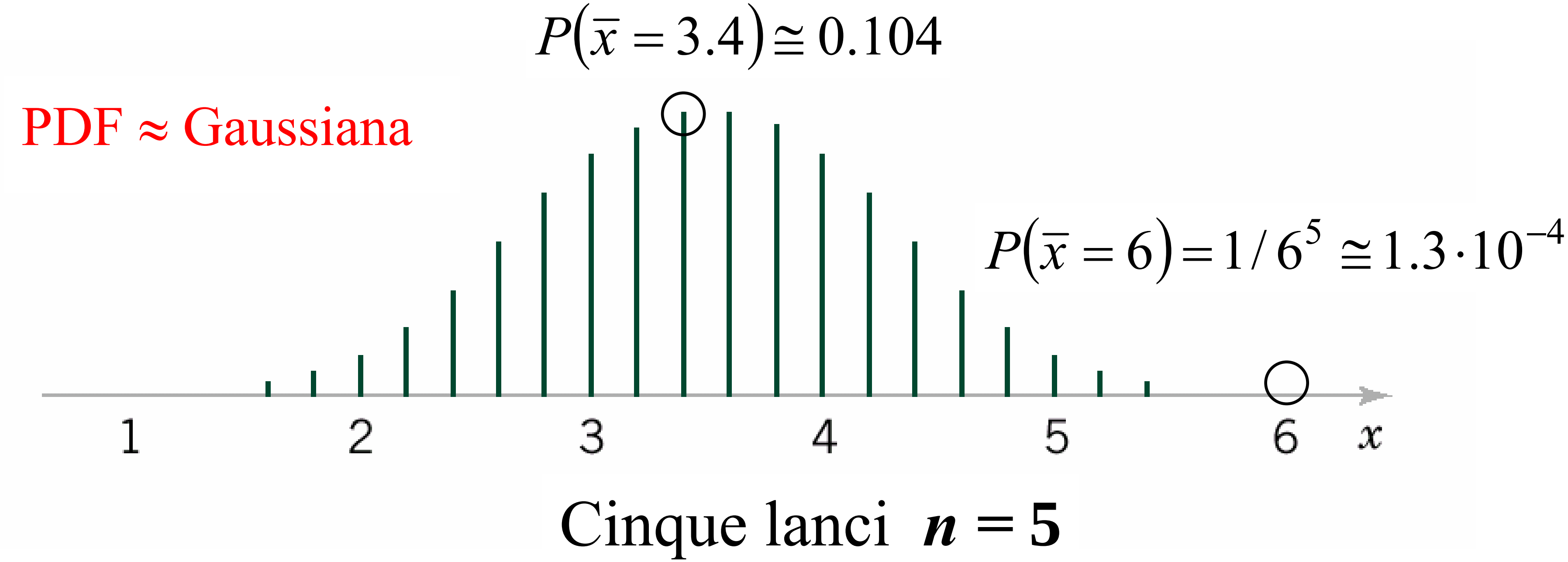
Il valore atteso per la somma di due dadi è $\mu_S=7$ e $f(S)=f(n\bar{x})=f(2\,\bar{x})$

Distribuzione di probabilità del valor medio di n lanci di dado



La somma di tre dadi è $S=d_1+d_2+d_3$ e naturalmente $f(S)=f(n\bar{x})$

Distribuzione di probabilità del valor medio di n lanci di dado

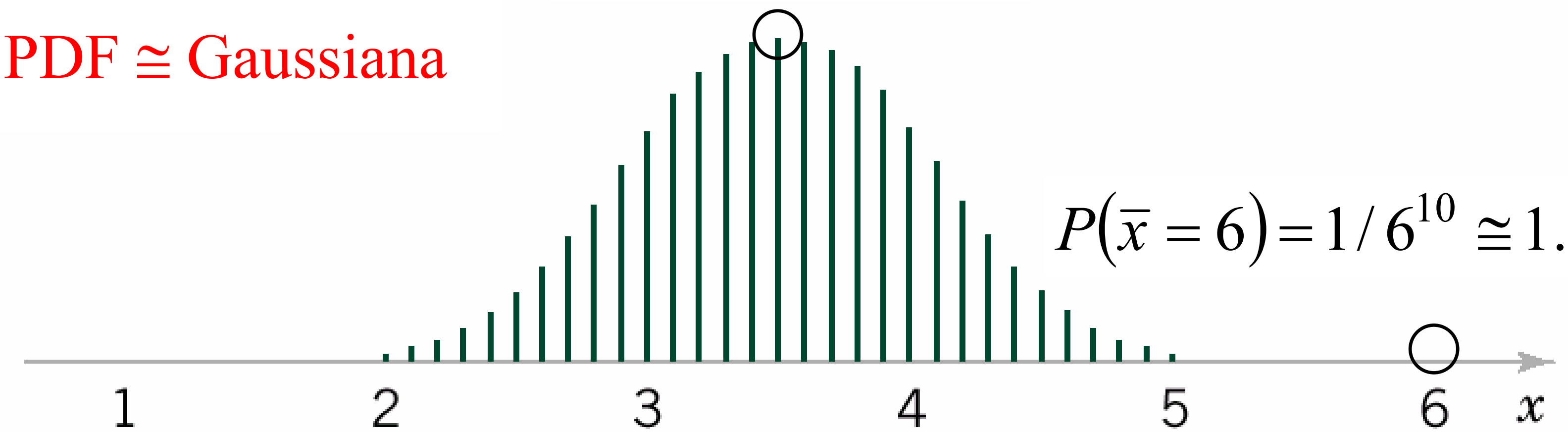


Somma S di 5 dadi, con ancora $f(S)=f(n\bar{x})$

Distribuzione di probabilità del valor medio di n lanci di dado

$$P(\bar{x} = 3.5) \cong 0.074$$

PDF ≅ Gaussiana



$$P(\bar{x} = 6) = 1/6^{10} \cong 1.6 \cdot 10^{-8}$$

Dieci lanci $\boldsymbol{n = 10}$

$$P(S = 10) = 1/6^{10} \cong 1.6 \cdot 10^{-8}$$

$$P(S = 60) = 1/6^{10} \cong 1.6 \cdot 10^{-8}$$

Naturalmente $f(S) = f(n\bar{x})$

Appendice: tabella valori $\Phi(z)$

z	$\Phi(z)$
-4	0,00003
-3,9	0,00005
-3,8	0,00007
-3,7	0,00011
-3,6	0,00016
-3,5	0,00023
-3,4	0,00034
-3,3	0,00048
-3,2	0,00069
-3,1	0,00097
-3	0,00135
-2,9	0,00187
-2,8	0,00256
-2,7	0,00347
-2,6	0,00466
-2,5	0,00621
-2,4	0,00820
-2,3	0,01072
-2,2	0,01390
-2,1	0,01786

z	$\Phi(z)$
-2	0,02275
-1,9	0,02872
-1,8	0,03593
-1,7	0,04457
-1,6	0,05480
-1,5	0,06681
-1,4	0,08076
-1,3	0,09680
-1,2	0,11507
-1,1	0,13567
-1	0,15866
-0,9	0,18406
-0,8	0,21186
-0,7	0,24196
-0,6	0,27425
-0,5	0,30854
-0,4	0,34458
-0,3	0,38209
-0,2	0,42074
-0,1	0,46017

z	$\Phi(z)$
0	0,50000
0,1	0,53983
0,2	0,57926
0,3	0,61791
0,4	0,65542
0,5	0,69146
0,6	0,72575
0,7	0,75804
0,8	0,78814
0,9	0,81594
1	0,84134
1,1	0,86433
1,2	0,88493
1,3	0,90320
1,4	0,91924
1,5	0,93319
1,6	0,94520
1,7	0,95543
1,8	0,96407
1,9	0,97128

z	$\Phi(z)$
2	0,97725
2,1	0,98214
2,2	0,98610
2,3	0,98928
2,4	0,99180
2,5	0,99379
2,6	0,99534
2,7	0,99653
2,8	0,99744
2,9	0,99813
3	0,99865
3,1	0,99903
3,2	0,99931
3,3	0,99952
3,4	0,99966
3,5	0,99977
3,6	0,99984
3,7	0,99989
3,8	0,99993
3,9	0,99995

$\Phi(z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	z
0.0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856	0.0
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555760	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345	0.1
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092	0.2
0.3	0.617911	0.621719	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732	0.3
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933	0.4
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405	0.5
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903	0.6
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236	0.7
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802338	0.805106	0.807850	0.810570	0.813267	0.8
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823815	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913	0.9
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143	1.0
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.878999	0.881000	0.882977	1.1
1.2	0.884930	0.886860	0.888767	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475	1.2
1.3	0.903199	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736	1.3
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888	1.4
1.5	0.933193	0.934478	0.935744	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083	1.5
1.6	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486	1.6
1.7	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959071	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273	1.7
1.8	0.964070	0.964852	0.965621	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621	1.8
1.9	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705	1.9
2.0	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691	2.0
2.1	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738	2.1
2.2	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989	2.2
2.3	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576	2.3
2.4	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613	2.4
2.5	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201	2.5
2.6	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427	2.6
2.7	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365	2.7
2.8	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074	2.8
2.9	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605	2.9
3.0	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999	3.0
3.1	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289	3.1
3.2	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499	3.2
3.3	0.999517	0.999533	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999650	3.3
3.4	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758	3.4
3.5	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999821	0.999828	0.999835	3.5
3.6	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888	3.6
3.7	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925	3.7
3.8	0.999928	0.999931	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950	3.8
3.9	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967	3.9