ESERCIZIO SU TEST STATISTICO (Z, T e χ^2)

Da una ditta di assemblaggio di PC ci viene chiesto di controllare la potenza media dissipata da un nuovo processore, che causa a volte problemi di sovraccarico dell'alimentatore (pur se dimensionato correttamente secondo le specifiche). Lo scopo dell'analisi è di fare eventualmente causa alla casa produttrice del processore per i danni arrecati alla ditta dalle troppo numerose riparazioni in garanzia. La casa produttrice fornisce i seguenti dati: potenza media 235 W, con deviazione standard pari a 50 W. Misuriamo quindi le potenze assorbite da 10 diversi processori, ottenendo i seguenti valori:
P_{ass} = 329, 265, 274, 243, 227, 260, 334, 252, 271, 244 W

a) Si vuole controllare l'ipotesi della casa madre, decidere quindi se è possibile intentare un'azione giuridica, con livello di significatività pari all' 1 % (si consideri attendibile la deviazione standard fornita dal produttore).
b) Quanto vale il valore P del test effettuato?
c) Visto il clima di sfiducia nei confronti della casa produttrice, vi viene chiesto di ripetere il test non utilizzando la deviazione standard fornita dal costruttore. È possibile con questo test smentire la casa madre con livello di significatività pari all'1 %?
d) Desideriamo controllare anche la varianza fornita dal costruttore. Si effettui quindi un test χ^2 sui dati acquisiti con livello di significatività del 10 %.

SOLUZIONE

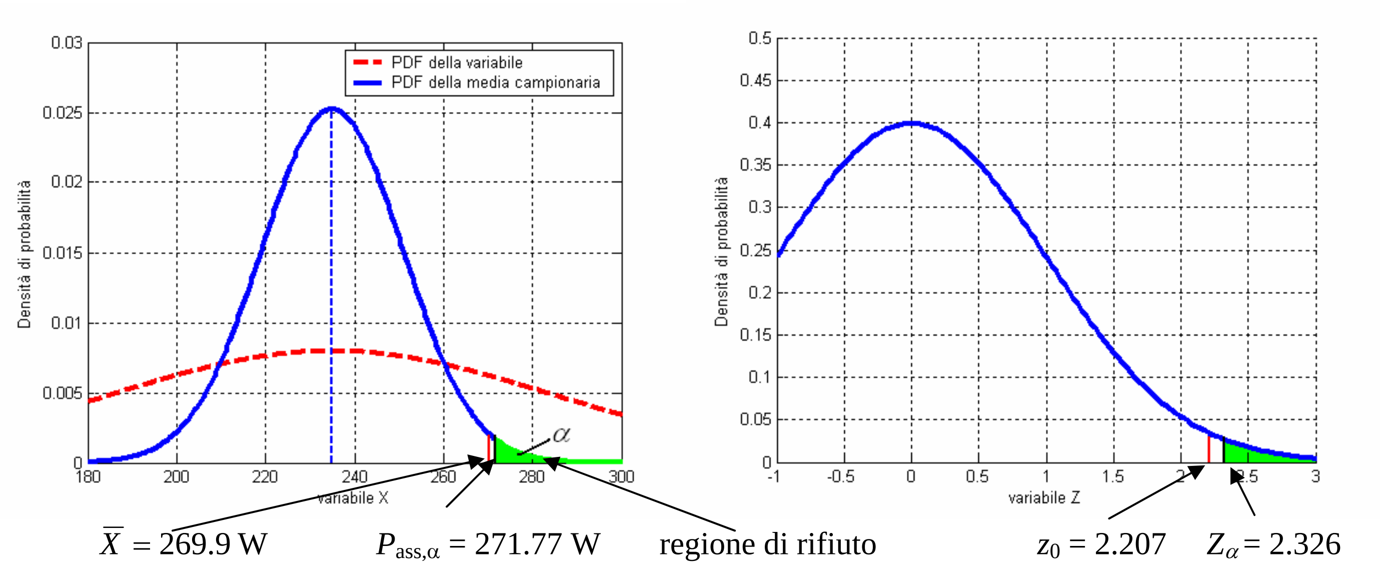
a) Calcoliamo il valore medio delle 10 misure effettuate (media campionaria):

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{ass,i} = 269.9 \text{ W}$$

Effettuiamo quindi il test statistico richiesto (test Z, in quanto vogliamo verificare il valor medio di una popolazione a varianza nota). Seguiamo gli 8 passi descritti nel libro di testo e a lezione:

1. Il parametro di interesse è la potenza media dissipata μ
2. H_0: $\mu = 235$ W
3. H_1: $\mu > 235$ W (il test è ad un lato solo, in quanto vogliamo dimostrare che il processore consuma più di quanto dichiarato)
4. livello di significatività richiesto $\alpha = 0.01$ (attenzione, su un solo lato)
5. La statistica di test è la statistica Z: $z_0 = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_{\overline{X}}} = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
6. Rifiutiamo H_0 se $Z > Z_\alpha = 2.326$. (questo risultato si ricava dalla tabella della funzione cumulativa in corrispondenza di un valore di probabilità α)
7. Calcoliamo quindi z_0, $z_0 = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_{\overline{X}}} = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{269.9-235}{50/\sqrt{10}} = 2.207$
8. Conclusione: dato che $z_0 = 2.207 < 2.326$ non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla con livello di significatività 0.01: non c'è abbastanza evidenza che l'ipotesi nulla sia falsa.

Riportiamo nelle figure seguenti i grafici delle densità di probabilità, sia della variabile reale sia della variabile standardizzata. Teniamo presente che il valore di potenza che corrisponde a $Z_\alpha = 2.326$ è $P_{ass,\alpha} = 271.77$ W, che è la nostra soglia di rifiuto.



2b)

Il valore *P*, che corrisponde al livello di significatività di soglia tra l'accettazione ed il rifiuto di H_0, si può ricavare direttamente dalla tabella dei valori della funzione cumulativa:
$Z_P = z_0 = 2.207$, per cui il valore P =0.0136.
L'interpretazione di questo valore è che l'ipotesi nulla sarebbe stata dichiarata falsa per qualsiasi livello di significatività α maggiore dell' 1.36 %. In questo caso con α = 1 % non si è potuto rifiutare H_0.

2c)

Ripetiamo ora il test, non fidandoci della varianza dichiarata dalla casa costruttrice. Il numero di gradi di libertà $\nu = n - 1 = 9$. Calcoliamo la deviazione standard campionaria.

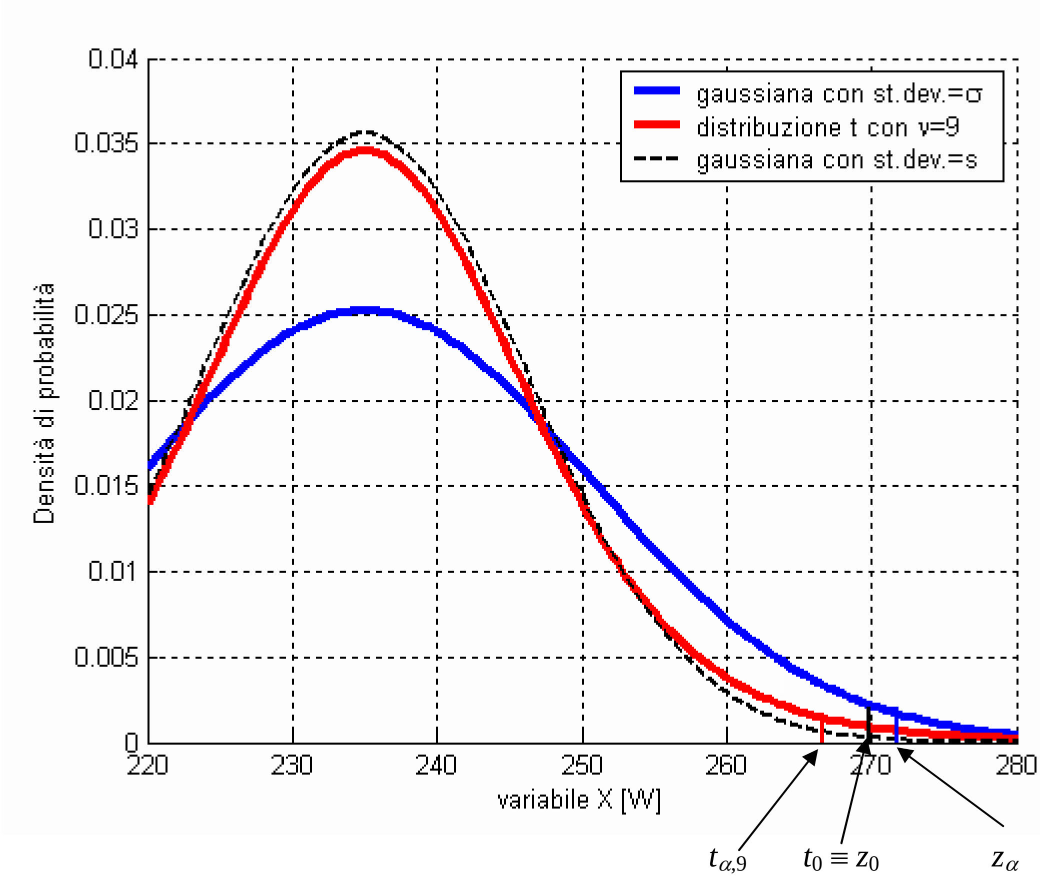
$$s(X) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2} = 35.43 \text{ W}$$

Effettuiamo quindi un test t:

1. Il parametro di interesse è la potenza media dissipata μ
2. H_0: μ = 235 W
3. H_1: μ > 235 W (il test è ad un lato solo, in quanto vogliamo dimostrare che il processore consuma più di quanto dichiarato)
4. livello di significatività richiesto α = 0.01
5. La statistica di test è ora la statistica t: $t_0 = \dfrac{\overline{X}-\mu}{s_{\overline{X}}} = \dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
6. Rifiutiamo H_0 se $t_0 > t_{\alpha,9} = 2.821$. (questo risultato si ricava dalla tabella dei punti percentuale della distribuzione t, con ν = 9)
7. Calcoliamo quindi t_0, $t_0 = \dfrac{\overline{X}-\mu}{s_{\overline{X}}} = \dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{269.9-235}{35.43/\sqrt{10}} = 3.115$
8. Conclusione: dato che t_0 =3.115 >2.821 rifiutiamo l'ipotesi nulla con livello di significatività 0.01: c'è abbastanza evidenza che l'ipotesi nulla sia falsa (si cade ora nella regione di rifiuto).

Commento: la distribuzione t è più larga della gaussiana, per cui a parità di α la regione di accettazione è più estesa. Però in questo caso la deviazione standard campionaria (dai nostri dati sperimentali) si è dimostrata nettamente inferiore alla deviazione standard fornita dalla casa produttrice, stringendo quindi notevolmente la curva di probabilità.

Per esemplificare graficamente riportiamo in figura le due distribuzioni: la gaussiana del primo test e la distribuzione t del secondo.

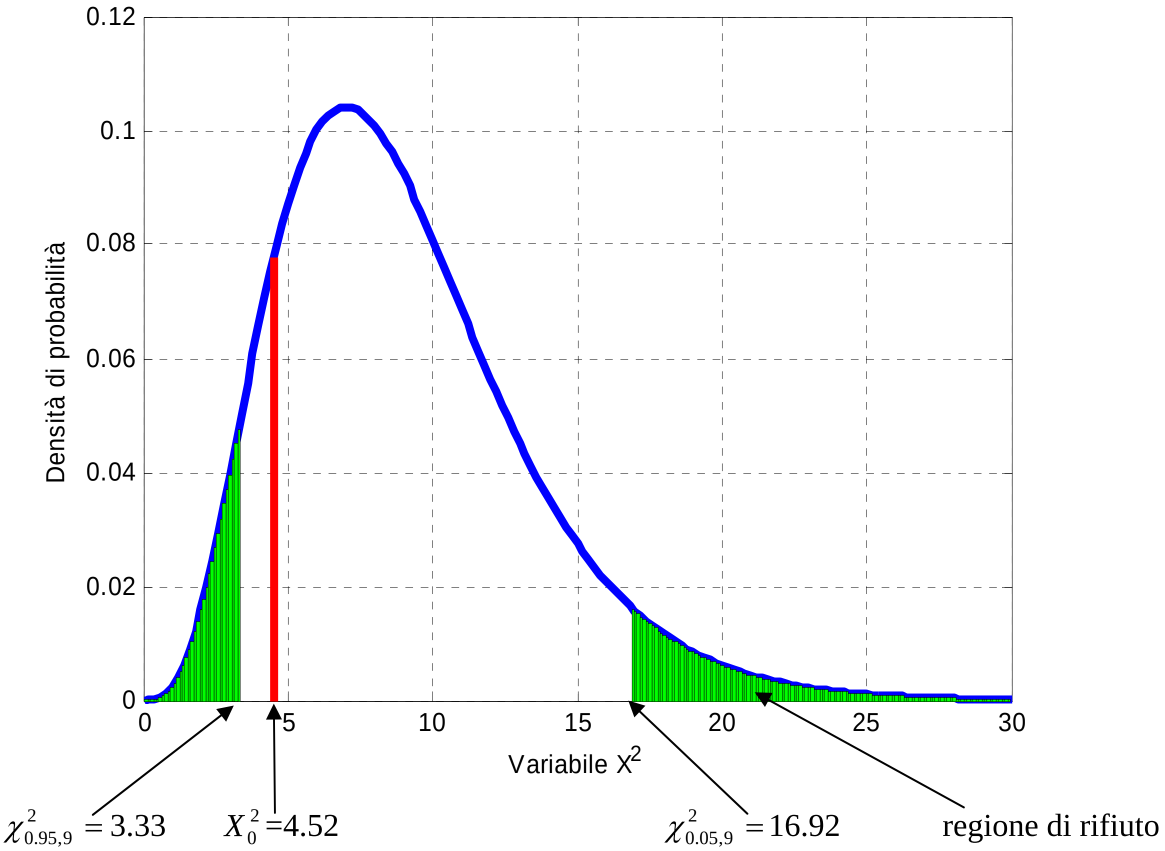


In figura sono stati riportati i valori di soglia sulla scala della potenza, applicando la formula inversa della standardizzazione. Si nota che il valore del test, 269.9 W, che corrisponde a t_0 e a z_0 nelle due normalizzazioni, è maggiore della soglia del test t, mentre è minore della soglia del test Z.

2d) Dobbiamo verificare la varianza dichiarata dal costruttore (σ_0^2= 2500 W^2). Abbiamo già calcolato la varianza campionaria s^2 = (35.43 W)^2= 1255.3 W^2, ottenuta con un numero di gradi di libertà $\nu = n - 1 = 9$. Effettuiamo quindi un test χ^2, seguendo gli 8 passi descritti a lezione:

1. Il parametro di interesse è la varianza della potenza dissipata
2. H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ = (50 W)^2 = 2500 W^2
3. H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (effettuare il test bilatero è una scelta)
4. livello di significatività richiesto $\alpha = 0.10$
5. La statistica di test è la statistica $X_0^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$
6. Rifiutiamo H_0 se è esterno ai due valori $\chi^2_{0.95,9} = 3.33$ e $\chi^2_{0.05,9} = 16.92$ (questi sono i due valori che si ricavano dalla tabella con 9 gradi di libertà, in corrispondenza del 95 % e del 5 %, che sono gli estremi sinistro e destro dell'intervallo di accettazione, in corrispondenza ad un livello di significatività α= 0.10)
7. Calcoliamo quindi $X_0^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{9 \times 35.43^2}{50^2} \cong 4.52$
8. Conclusione: dato che X_0^2 è interno all'intervallo di accettazione, non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla con livello di significatività 0.10.

Riportiamo il grafico della distribuzione χ^2 con 9 gradi di libertà, le soglie di rifiuto ed il valore corrispondente alla misura effettuata, che è contenuto nella regione di accettazione.



ESERCIZIO DA FARE A CASA:

Supponiamo di voler ripeter l’ultimo test effettuato, considerando però un’ipotesi alternativa monolatera:
H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$ (vogliamo ora dimostrare che è minore, non solo diversa)

RISULTATO: non si riesce ancora a rifiutare, ma stavolta siamo molto vicini alla regione critica (ora il 10% è tutto a sinistra, come si vede in figura).