

1_DEFINIZIONI E RAPPRESENTAZIONI DI GIUNZIONI

Si definisce **giunzione in guida d'onda** una idealizzazione di un effettivo dispositivo elettromagnetico i cui accessi sono costituiti da guide uniformi, senza perdite e cilindriche (di sezione arbitraria). Il dispositivo è supposto lineare e l'energia vi può entrare o uscire soltanto attraverso delle guide i cui contorni sono perfettamente conduttori.

In ogni guida d'accesso alla giunzione e per *ogni possibile modo che si propaghi*, i campi elettrico \vec{E}_t e magnetico \vec{H}_t trasversali all'asse della guida (z) si possono esprimere come:

$$\vec{E}_t = v(z) \cdot \vec{e}(x, y) \quad \text{e} \quad \vec{H}_t = i(z) \cdot \vec{h}(x, y) \quad (1.1)$$

dove v e i , rispettivamente **tensione** e **corrente generalizzate**, sono quantità scalari complesse che contengono completamente l'informazione sulla dipendenza temporale in regime sinusoidale ($e^{j\omega t}$) e quindi sulla fase, e sulla dipendenza da z , mentre \vec{e} ed \vec{h} , vettori **tra loro ortogonali**, sono i campi base di ciascun modo e descrivono la distribuzione dei campi nella sezione trasversale della guida, per il modo in esame, e non dipendono da z . Senza perdere in generalità è conveniente sceglierli entrambi reali.

Le quantità v e i possono essere scelte in modo da avere le stesse dimensioni e proprietà simili a quelle della tensione e corrente elettriche nei circuiti a parametri concentrati grazie ad una opportuna definizione di **costanti di normalizzazione** di **potenza** W_0 ed **impedenza** Z_0 (**impedenza caratteristica**), che verranno introdotte in quanto segue. Di conseguenza le dimensioni di \vec{e} ed \vec{h} risultano essere il reciproco di una lunghezza.

La **potenza** P che si propaga lungo l'asse z della guida è data, secondo il teorema di Poynting, da

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_S (\vec{E}_t \times \vec{H}_t^* \cdot \vec{e}_z) ds \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [v \cdot i^*] \cdot \int_S (\vec{e} \times \vec{h} \cdot \vec{e}_z) \cdot ds = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [v \cdot i^*] \cdot W_0 \quad (2.1)$$

dove l'asterisco * significa complesso coniugato e W_0 risulta essere una costante adimensionata in base alla scelta sopra ricordata sulle dimensioni di tensione e corrente elettrica attribuite a v e i rispettivamente.

Poiché i campi elettromagnetici trasversi possono essere scomposti in una componente che si propaga secondo l'asse positivo delle z (+) e in una componente che si propaga lungo l'asse negativo di z (-) ($\vec{E}_t = \vec{E}_t^+ + \vec{E}_t^-$, ecc.), possiamo scrivere che $v = v^+ + v^-$ e similmente per i , quindi otteniamo l'espressione di una **impedenza d'onda** Z_w data da:

$$Z_w = \frac{E_t^+}{H_t^+} = \frac{v^+}{i^+} \cdot \frac{e(x, y)}{h(x, y)} = Z_0 \cdot z_w \quad \left(Z_0 = \frac{v^+}{i^+} \right) \quad (3.1)$$

dove E_t e H_t sono le ampiezze dei corrispondenti vettori e Z_w ha le dimensioni di un'impedenza (Ω) e lo stesso vale per Z_0 , sicché z_w è una costante adimensionata, che ha il significato di "impedenza d'onda" dei vettori di base. Se i versori del riferimento sono scelti in modo che

$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3 \equiv \vec{u}_z$, Z_w è positiva o negativa secondo che si considerino rispettivamente onde propagantesi secondo $+z$ o $-z$. La scelta più semplice e più usata dei valori della costante di potenza $W_0 \equiv W_0 = 1$, mentre per la costante di impedenza Z_0 la scelta è opinabile. Solo per i modi TEM ha senso chiedere che tensioni e correnti generalizzate coincidano con tensioni e correnti misurabili. Per il modo fondamentale TEM in cavo coassiale risulta pertanto

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

dove μ e ε sono rispettivamente la permeabilità magnetica e la permittività dielettrica del mezzo, mentre r_2 e r_1 sono rispettivamente i raggi dei conduttori esterno e interno. Come si nota in questo caso Z_0 è effettivamente l' *impedenza caratteristica* (reale) della linea perché dipende da suoi parametri specifici, senza dipendenza da scelte non fisiche. L'opinabilità delle scelte è invece caratteristica dei modi non TEM che non possono essere descritti in termini di tensioni e correnti se non convenzionalmente definite.

Per quanto riguarda la generalità della espressione (1.1) che immaginiamo di applicare a ogni singolo modo di propagazione, si osserva che spesso le misure si suppongono eseguite operando con il modo fondamentale delle guide di accesso alla giunzione e in questo modo dobbiamo supporre di operare in quanto segue. Se i piani di riferimento che definiscono la posizione delle porte sono sufficientemente lontani dalla struttura della giunzione nella quale si possono originare i modi superiori, è lecito supporre che il solo modo fondamentale sia efficacemente presente a ciascuna porta.

Poiché i campi trasversali sono la somma di campi propagantisi nei due versi lungo l' asse z è un'utile rappresentazione ricorrere alle *onde viaggianti* a e b ottenibili nel seguente modo (questa definizione non è unica nella letteratura, ma gode di un alto livello di simmetria):

$$\frac{v}{\sqrt{Z_0}} = a + b \quad \sqrt{Z_0} \cdot i = a - b \quad (4.1)$$

e da queste relazioni otteniamo

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\sqrt{Z_0}} + \sqrt{Z_0} \cdot i \right) \quad b = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\sqrt{Z_0}} - \sqrt{Z_0} \cdot i \right) \quad (5.1)$$

Sostituendo quindi nella (2.1) ricaviamo $P = W_0 \cdot \frac{1}{2} \text{Re}[v \cdot i^*] = \frac{W_0}{2} (|a|^2 - |b|^2)$, e possiamo ancora osservare che il rapporto $\frac{b}{a} = \frac{v - Z_0 \cdot i}{v + Z_0 \cdot i} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$, essendo $Z = \frac{v}{i}$, è la definizione del coefficiente

di riflessione. Vediamo quindi che anche se a e b non hanno un significato fisico, tuttavia grandezze di significato come potenza e coefficiente di riflessione si possono esprimere attraverso di esse.

Dalla teoria dei circuiti elettrici sappiamo che un circuito a **n porte** (o a n coppie di morsetti) lineare e passivo può essere rappresentato in varie maniere, ad esempio mediante le **matrici impedenza** Z e **ammettenza** Y che mettono in relazione v e i **matrici colonne** che esprimono tensioni e correnti generalizzate alle diverse porte, ad esempio:

$$v = Z \cdot i \quad \text{e} \quad i = Y \cdot v \quad (6a.1)$$

la prima delle quali può essere esplicitata in

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_n \end{bmatrix} \quad (6b.1)$$

Alla stessa maniera si possono usare le ampiezze a e b espresse mediante **matrici colonne** e messe in relazione dalla **matrice di diffusione** (*scattering matrix*) S nel seguente modo:

$$b = S \cdot a \quad (7a.1)$$

ed in maniera estesa:

$$\begin{cases} b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + \dots + S_{1n}a_n \\ b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + \dots + S_{2n}a_n \\ \dots \\ b_n = S_{n1}a_1 + S_{n2}a_2 + \dots + S_{nn}a_n \end{cases} \quad (7b.1)$$

dove le a_k sono ampiezze che si propagano **incidenti** ai rispettivi piani k della giunzione e b_k le corrispondenti ampiezze **uscanti**. Sebbene si possano stabilire delle relazioni di trasformazione tra le matrici Z o Y e la matrice S , è più conveniente assumere l'esistenza delle relazioni (7.1) in base alle proprietà dei sistemi lineari piuttosto che ricorrere a similitudini con i circuiti a parametri concentrati e a grandezze come la tensione e la corrente elettriche che, tranne in casi particolari, non sono neppure definibili alle alte frequenze.

Il **significato fisico** degli elementi S_{ik} è immediato pensando che $b_i = S_{ik}a_k$ quando $a_1 = a_2 = \dots a_{k-1} = a_{k+1} = \dots a_n = 0$ cioè quando tutte le porte tranne la k -esima sono chiuse su terminazioni non riflettenti. Se $i \neq k$ essi esprimono particolari coefficienti di trasmissione, se $i = k$ esprimono particolari coefficienti di riflessione. Si osserva ancora che mentre le matrici Z e Y non esistono per tutti i circuiti lineari, per il tendere a infinito in alcune configurazioni di certi elementi di matrice, invece la matrice di diffusione, come la matrice ABCD (uscite in funzione degli ingressi), esiste sempre. Quando la porta j -esima è chiusa su una terminazione (carico, *load*) con coefficiente di riflessione Γ_{lj} , risulta valida la relazione di chiusura $\Gamma_{lj} = a_j/b_j$.

Lo studio e il progetto di circuiti in microonde può con profitto utilizzare forme particolari della matrice di diffusione ottenute considerando sistemi ideali. Nell'ambito delle misure, soprattutto se raffinate, queste considerazioni su strutture ideali servono solo di indirizzo, è necessario poi verificare e quantificare gli scostamenti tra ideale e reale per apportare le correzioni eventualmente necessarie. Ad esempio una struttura può mostrare particolari proprietà di simmetria che implicano relazioni speciali tra elementi della matrice di diffusione o l'annullarsi di alcuni di essi, oppure può essere immaginata senza perdite, la qual cosa implica che la matrice di diffusione sia unitaria, cioè $\overline{SS^*} = I$ dove la soprilineatura indica la trasposta ovvero la matrice che si ottiene scambiando righe con colonne e I è la matrice unità, matrice diagonale con tutti gli elementi della diagonale principale di valore 1, mentre sono nulli tutti gli altri. Per una matrice unitaria valgono le seguenti proprietà:

$$|\det S_{ik}| = 1 \qquad \sum_k S_{ik} S_{jk}^* = \delta_{ij} \qquad \sum_i S_{ik} S_{ij}^* = \delta_{kj} \qquad (8.1)$$

Come già accennato, tuttavia, queste relazioni devono servire da guida per valutare proprietà di strutture, non per essere usate direttamente nelle misure. Fa eccezione a quanto detto la **condizione di reciprocità** che nella teoria dei circuiti si esprime con le condizioni $Z_{ik} = Z_{ki}$ ovvero $Y_{ik} = Y_{ki}$. Essa sussiste rigorosamente se la giunzione non contiene dispositivi con elementi anisotropi e in tal caso si esprime nella forma $Z_{0i}^{-1} \cdot S_{ik} = S_{ki} \cdot Z_{0k}^{-1}$ e, in particolare, se le guide di accesso sono **uguali**

$$Z_{0i} = Z_{0k} \rightarrow S_{ik} = S_{ki}. \qquad (9.1)$$

Spesso in un circuito si utilizzano **isolatori** o **circolatori** che contengono dispositivi anisotropi: se si vogliono utilizzare le condizioni di reciprocità è necessario definire i confini della giunzione in modo da escludere tali elementi.

2_COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE E RAPPORTO D' ONDA STAZIONARIA.

Il *coefficiente di riflessione* osservato alla porta i è:

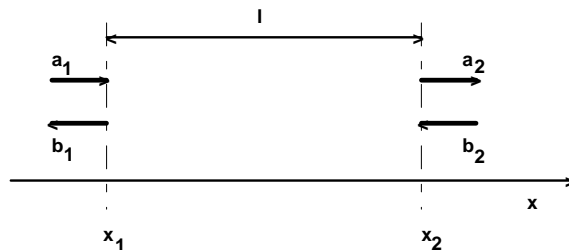
$$\Gamma_i = \frac{b_i}{a_i} = \frac{v_i - Z_{0i}}{v_i + Z_{0i}} = \frac{Z_i - Z_{0i}}{Z_i + Z_{0i}} \quad (1.2)$$

e soltanto quando per tutte le a_k ($k \neq i$) è $a_k = 0$, allora è $\Gamma_i = S_{ii}$.

Tra due **piani di riferimento** x_1 e x_2 distanti l valgono le relazioni:

$$a_2 = a_1 e^{-\gamma l} \quad b_2 = b_1 e^{\gamma l} \quad (2.2)$$

ove $\gamma = \alpha + j\beta$, essendo α l' *attenuazione* e β la *costante di propagazione* (Fig. 1).



Dalle relazioni precedenti si ottiene:

$$\Gamma_1 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2 e^{-\gamma l}}{a_2 e^{\gamma l}} = \Gamma_2 e^{-2\gamma l} \quad (3.2)$$

e posto $\Gamma = |\Gamma| e^{j\psi}$ si ha:

$$|\Gamma_1| = |\Gamma_2| e^{-2\alpha l} \quad \psi_1 = \psi_2 - 2\beta l + 2n\pi \quad (n \text{ intero}).$$

Osseriamo che se facciamo variare solo la fase di Γ_2 in una linea senza perdite, anche Γ_1 varierà solo in fase, quindi se l'estremo di Γ_2 descrive una circonferenza nel piano complesso, lo stesso accadrà per Γ_1 e si tratta di circonferenze concentriche. Una maniera particolare di ottenere ciò è far scorrere un corto circuito mobile lungo una linea (guida) *senza perdite* cioè con $\alpha = 0$. In questo caso entrambi i coefficienti di riflessione hanno ampiezza unitaria.

Il *rapporto d' onda stazionaria di tensione* (VSWR) σ è definito nella maniera seguente:

$$\sigma = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}. \quad (4.2)$$

Per una **linea senza perdite** questa definizione è equivalente a:

$$\sigma = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{|a| + |b|}{|a| - |b|} = \frac{v_{\max}}{v_{\min}} \quad (4b.2)$$

e per la misura di σ si suppone di muoversi lungo la linea in modo da individuare v_{max} e v_{min} .

In **presenza di perdite**, stabilito di assumere la posizione di v_{min} la più prossima a v_{max} dalla parte del generatore, si ha:

$$\left| \frac{v_{max}}{v_{min}} \right| = \sigma_A = \frac{|a| + |b|}{|a|e^{\alpha \frac{\lambda_g}{4}} - |b|e^{-\alpha \frac{\lambda_g}{4}}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} e^{-\alpha \frac{\lambda_g}{4}} \quad (4c.2)$$

3_ANALISI DI ALCUNE PROPRIETA' CIRCUITALI

E' stata vista la relazione semplice di trasformazione del coefficiente di riflessione lungo una linea, con il caso particolare di linea senza perdite. Consideriamo ora una generica giunzione a due porte rappresentata dalla sua matrice di diffusione S . Se chiudiamo la porta 2 su un coefficiente di riflessione Γ_l , il sistema è descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \\ \Gamma_l &= a_2/b_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Se nelle ultime due equazioni risolviamo rispetto a a_2 e sostituiamo nella prima otteniamo il rapporto b_1/a_1 che, per il circuito a una sola porta costituitosi, è a tutti gli effetti il coefficiente di riflessione Γ_1 visto dalla porta 1. Otteniamo

$$\frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_l}{1 - S_{22}\Gamma_l} = \frac{S_{11} + (S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})\Gamma_l}{1 - S_{22}\Gamma_l} \quad (2.3)$$

che collega Γ_1 e Γ_l attraverso la più generale relazione bilineare (2.3). Questa trasformazione è di grande importanza, perché se Γ_l esprime a sua volta il coefficiente di riflessione di un successivo due porte chiuso all'uscita su Γ_l' , possiamo facilmente verificare che abbiamo una nuova relazione bilineare tra Γ_1 e Γ_l' . Come era da attendersi una successione di circuiti a due porte in cascata stabilisce una relazione bilineare tra il coefficiente di riflessione di chiusura in uscita di tutta la cascata e quello in ingresso.

Poiché la trasformazione bilineare ricorre frequentemente è importante indagarne le proprietà. Consideriamo allora due variabili complesse w e z collegate tra loro dalla più generale relazione bilineare

$$w = \frac{Az + B}{Cz + D} = \frac{\frac{A}{C}(Cz + D) + B - \frac{AD}{C}}{Cz + D} = \frac{A}{C} + \frac{B - \frac{AD}{C}}{Cz + D} \quad (3.3)$$

che viene riaggiustata nel seguente modo

$$\frac{w - \frac{A}{C}}{B - \frac{AD}{C}} = \frac{1}{Cz + D} \quad (4.3)$$

Se introduciamo due nuove variabili $W = \frac{w - \frac{A}{C}}{B - \frac{AD}{C}}$ e $Z = Cz + D$, la relazione diventa $W = 1/Z$.

Da quanto detto, se z descrive una circonferenza, anche Z descriverà lo stesso tipo di curva (la trasformazione prevede una omotetia seguita da una traslazione) di raggio R intorno a un centro S . Questa condizione si può descrivere come $(Z-S)(Z-S)^* = R^2$, ovvero

$$Z Z^* - S Z^* - S^* Z + S S^* - R^2 = 0 \quad (5.3)$$

Sostituendo $W = 1/Z$ nella (5.3), otteniamo $\frac{1}{W W^*} - \frac{S}{W^*} - \frac{S^*}{W} + S S^* - R^2 = 0$ ovvero

$$W W^* - \frac{S W}{S S^* - R^2} - \frac{S^* W^*}{S S^* - R^2} + \frac{1}{S S^* - R^2} = 0 \quad (6.3)$$

che è della stessa forma dell'equazione (5.3). Si noti $S S^* - R^2$ può essere tanto > 0 quanto < 0 , secondo che il centro S dista di più o di meno di R da centro e lo stesso vale per la condizione di S' ($S' = \frac{S^*}{S S^* - R^2}$) e R' ($R'^2 = \frac{R^2}{(S S^* - R^2)^2}$) riguardo a W che dunque descrive anch'essa una circonferenza. Allo stesso modo si comporterà w che deriva da W attraverso una omotetia seguita da una traslazione. Questa corrispondenza tra circonferenze nei piani di z e di W comprende anche le rette che possono essere viste come circonferenze con raggio di curvatura infinito.

Se ad una porta k la giunzione viene alimentata da un generatore esterno, l'espressione equivalente a quella corrispondente ai teoremi di Thevenin e di Norton ma utilizzando le onde viaggianti è la più generale relazione lineare contenente anche una sorgente di segnale :

$$b_k = S_{gk} a_k + b_{gk} \quad (7.3)$$

dove la totale onda emergente dalla sorgente (b_k) è costituita dalla combinazione dell'onda generata (b_{gk}) su un carico non riflettente e della parte riflessa (coefficiente di riflessione S_{gk}) dell'onda entrante (a_k). Si noti che in questa espressione onde entranti e uscenti fanno riferimento al circuito a una sola porta costituito dalla sorgente, per cui b_k diventa un'onda entrante nella giunzione passiva alla quale la sorgente è collegata, mentre a_k diventa a sua volta un'onda uscente.

4_ ALCUNE PROPRIETA' DEL COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE

Con riferimento alla espressione (2.3), che riscriviamo mettendo in risalto i differenti modi di scrivere il legame tra il coefficiente di riflessione di chiusura $\Gamma_l = |\Gamma_l| e^{j\varphi}$ e quello d'ingresso Γ_1

$$\frac{b_1}{a_1} = \Gamma_1 = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_l}{1 - S_{22}\Gamma_l} = \frac{S_{11} + (S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})\Gamma_l}{1 - S_{22}\Gamma_l} = \frac{a\Gamma_l + b}{c\Gamma_l + d} \quad (1.4)$$

vediamo come la corrispondenza tra Γ_l e Γ_1 può essere costruita in due casi che spesso si presentano nei circuiti in microonde, cioè la variazione del solo $|\Gamma_l|$ e quella della sola fase φ . Si osservi che a, b, c e d sono definite a meno di una costante moltiplicativa complessa.

Variatione di $|\Gamma_l|$: riferendoci alla Fig.2, se prendiamo in esame una retta passante per l'origine nel piano Γ_l e in particolare l'asse reale abbiamo tre punti $\Gamma_l = -1, \Gamma_l = 0$ e $\Gamma_l = 1$, appartenenti a una retta e che quindi, nel piano di Γ_1 , staranno su una circonferenza in corrispondenza dei valori $\Gamma_{1,1} = S_{11} - \frac{S_{12}S_{21}}{1 + S_{22}} = \frac{-a + b}{-c + d}$, $\Gamma_{1,0} = S_{11} = \frac{b}{d}$, $\Gamma_{1,-1} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}}{1 - S_{22}} = \frac{a + b}{c + d}$, rispettivamente. Una

situazione di questo genere si verifica quando nelle misure di potenza con bolometri si altera volutamente il valore di resistenza dal bolometro stesso modificandone la polarizzazione.

Naturalmente possiamo anche immaginare situazioni nelle quali $|\Gamma_l|$ varia senza che Γ_l sia costretto a stare sull'asse reale. In Fig. 3 vediamo la successione dei passi della trasformazione utilizzando la prima espressione di Γ_1 nella (1.4): per comodità è utile all'inizio dividere per Γ_l a numeratore e denominatore ottenendo la relazione

$$\Gamma_1 = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}}{\frac{1}{\Gamma_l} - S_{22}} \quad (2.4)$$

e ricordiamo che tutti i parametri S e Γ hanno modulo minore o uguale a 1 mentre con ψ_{ik} si indicano le fasi dei parametri S_{ik} . Osserviamo che la condizione $|\Gamma_l| \leq 1$ rende non fisicamente possibili tutti i punti della retta di partenza e pertanto archi delle circonferenze disegnate saranno non occupati. La distanza dall'origine di $\Gamma_l^{-1} - S_{22}$ calcolabile con i metodi della geometria vale $D = \frac{|S_{22}| |\sin \psi_{22} + \cos \psi_{22} \operatorname{tg} \varphi|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$ che diventa il reciproco del diametro della circonferenza alla quale

appartiene $(\Gamma_l^{-1} - S_{22})^{-1}$ che passa anche per l'origine. La circonferenza alla quale appartiene Γ_1 ha raggio $R_1 = \frac{|S_{12}S_{21}|}{2D}$, mentre il centro è posto in $C_1 = S_{11} + R_1 e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2} + \psi_{12} + \psi_{21}\right)}$.

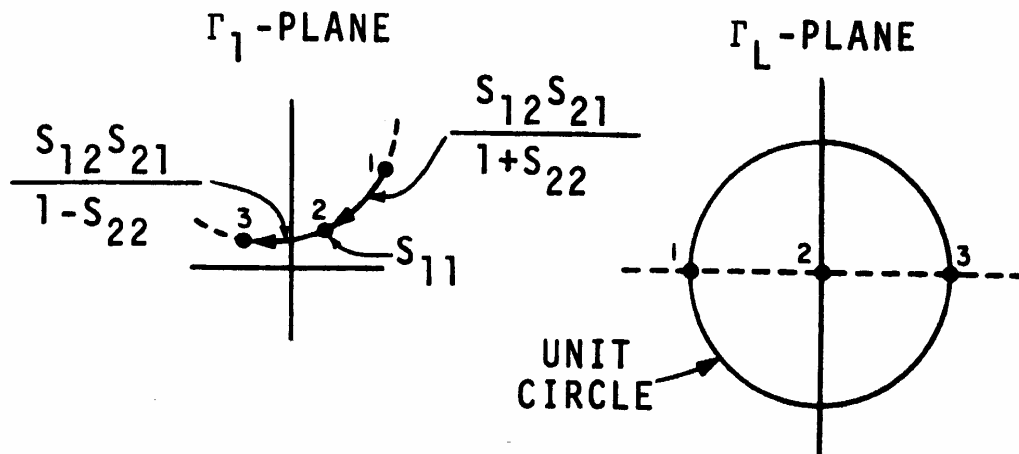


Fig. 2_ Esempio di trasformazione retta
 Circonferenza: al segmento sull'asse reale
 $1 \leq \Gamma_l \geq 1$, corrisponde un arco di circonferenza nel piano Γ_1 .

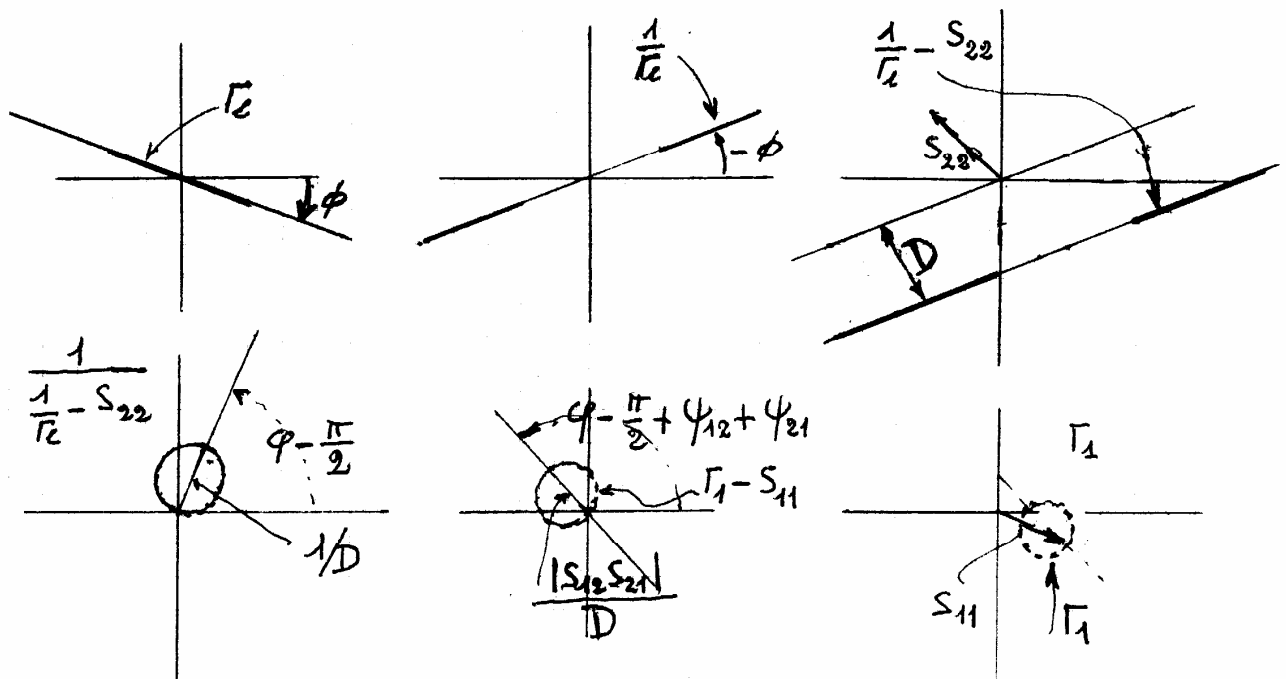


Fig. 3_ I successivi passi della trasformazione che porta da $|\Gamma_l|$ a Γ_1 applicando la relazione (1.4)

Variatione di φ : una terminazione che corre in una linea senza perdite introduce una semplice variazione di fase del coefficiente di riflessione lasciandone il modulo inalterato. Di nuovo conviene utilizzare la relazione (2.4) e la Fig. 4 illustra i vari passi della trasformazione. Sia Γ_l sia Γ_l^{-1} descrivono ora l'intera circonferenza con centro nell'origine, mentre il centro di $\Gamma_l^{-1} - S_{22}$ è evidentemente situato in $-S_{22}$. E' facile determinare le posizioni dei punti più distante e più vicino all'origine, che, a parte il cambiamento di segno della fase, si scambiano il ruolo nell'inversione e

pertanto sono ben definibili il valore del raggio R_1'' e la posizione del centro C_1'' di $(\Gamma_1^{-1} - S_{22})^{-1}$:

$$R_1'' = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{|\Gamma_1|^{-1} + |S_{22}|} + \frac{1}{|\Gamma_1|^{-1} - |S_{22}|} \right] = \frac{|\Gamma_1|}{1 - |S_{22}\Gamma_1|^2} \quad (3.4)$$

$$|C_1''| = R_1'' - \frac{1}{|\Gamma_1|^{-1} + |S_{22}|} = \frac{|S_{22}\Gamma_1|^2}{1 - |S_{22}\Gamma_1|^2} = R_1'' |S_{22}\Gamma_1| \quad (4.4)$$

Il successivo prodotto per $S_{12}S_{21}$ comporta oltre a una rotazione angolare di $\psi_{12} + \psi_{21}$ una alterazione dei moduli che diventano R_1' e C_1' . L'ultima operazione è di nuovo soltanto una traslazione.

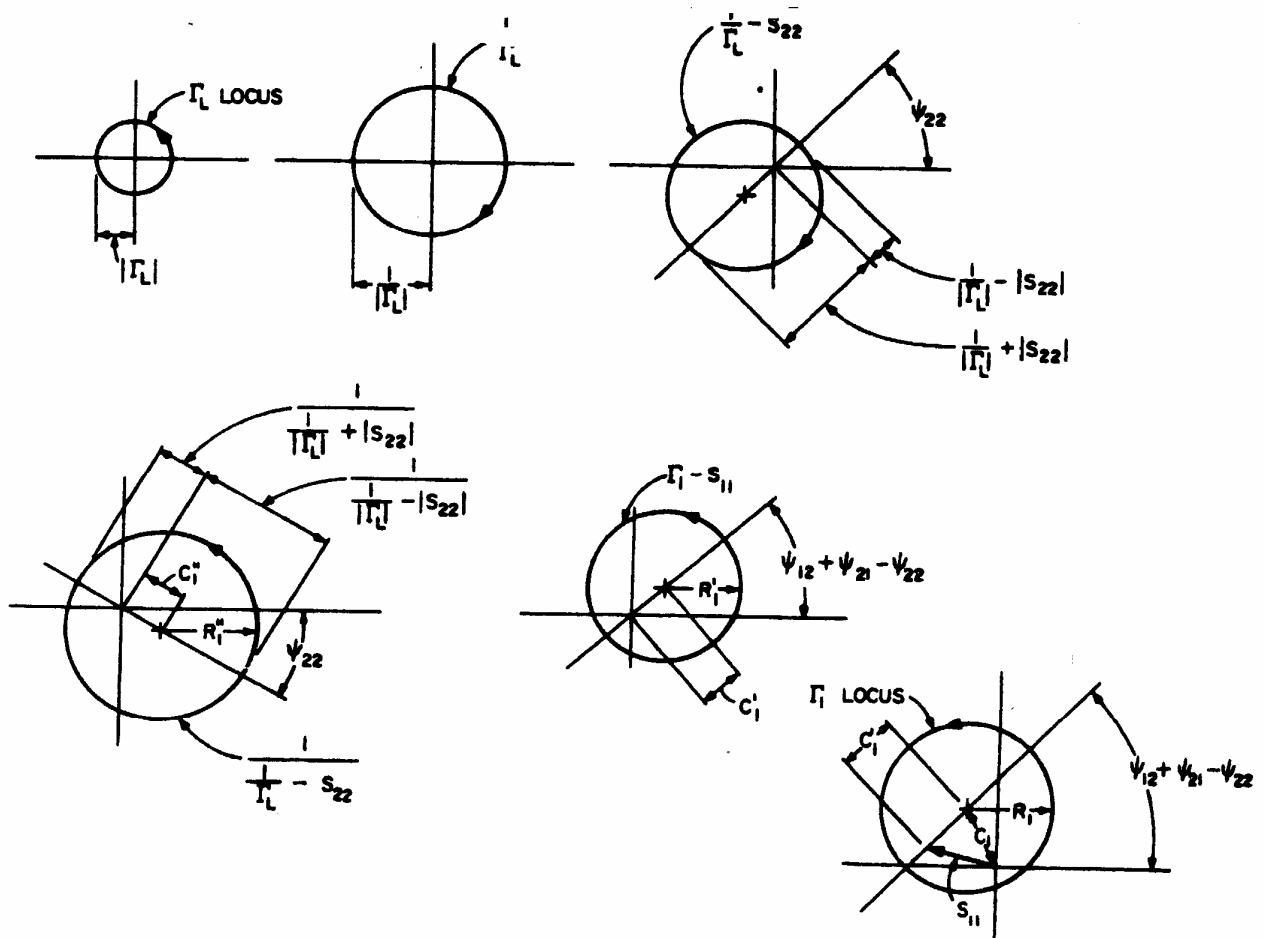


Fig. 4_I vari passi della trasformazione da $|\Gamma_1| = \cos t$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ alla corrispondente circonferenza nel piano Γ_1 .