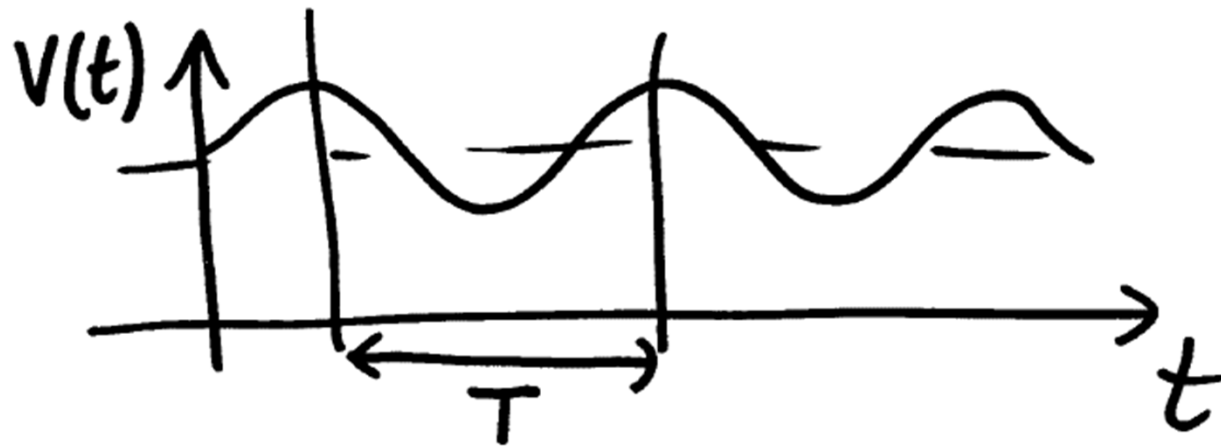


**RAPPRESENTAZIONE
GRAFICA
DEI RISULTATI
SPERIMENTALI
INTERPOLAZIONE E
CURVE DI REGRESSIONE**

Rappresentazione grafica

- “Visione d’insieme” di una grandezza, in funzione del tempo o di un altro parametro
- Tipicamente si utilizzano assi coordinati che devono riportare la descrizione della grandezza rappresentata e all’occorrenza anche la sua unità di misura



Tipi di Grafici

- Quando sugli assi compaiono dei valori numerici, bisogna sempre indicare l'unità di misura corrispondente. Il grafico si dice **QUANTITATIVO**
- Altrimenti il diagramma è **QUALITATIVO** e può servire per indicare degli andamenti o delle tendenze

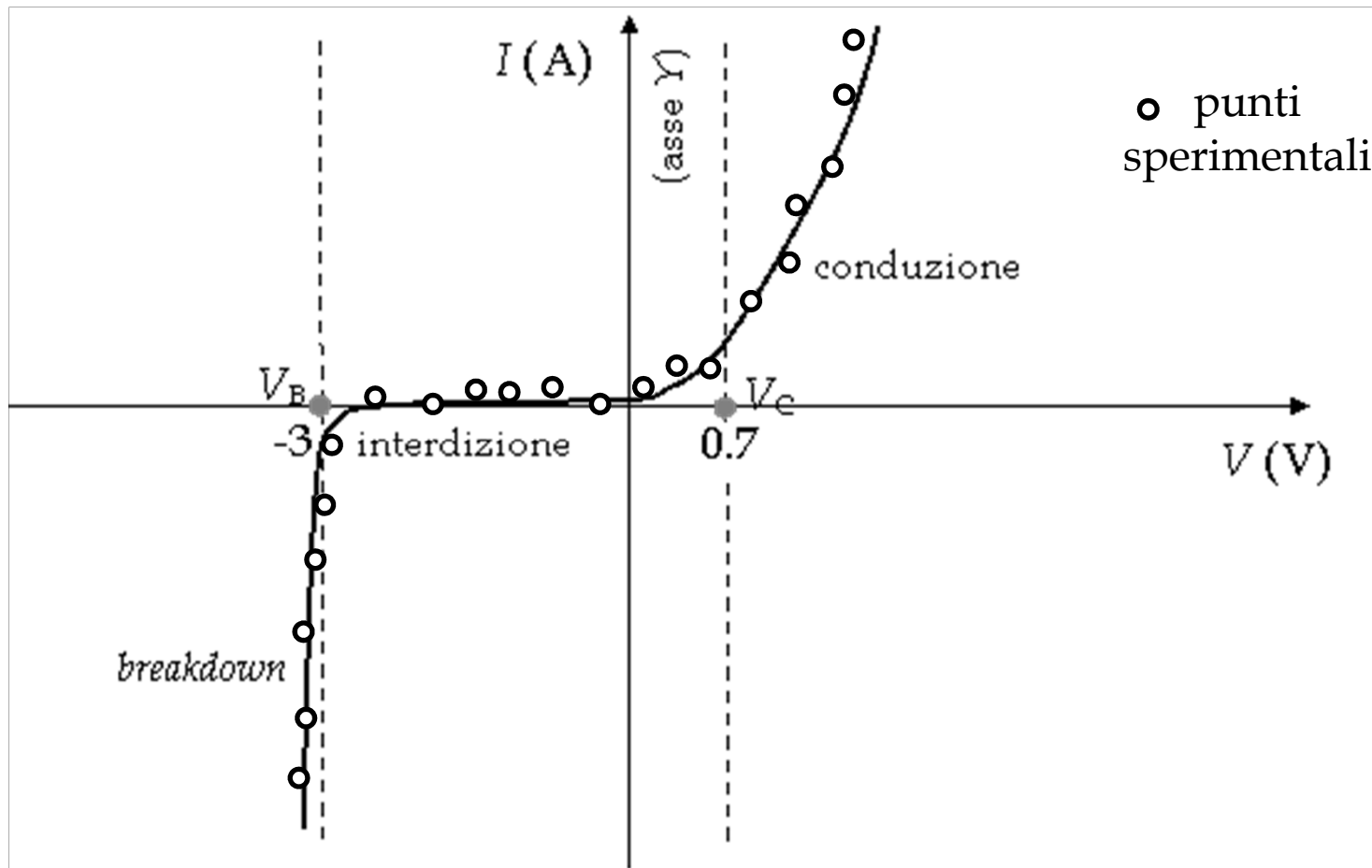
Grafico in un PIANO CARTESIANO

- ASCISSE (asse X): variabile indipendente
o di comando o di ingresso
- ORDINATE (asse Y): variabile dipendente
o grandezza di uscita

Tipicamente $u(x_i) \ll u(y_i)$, ossia la variabile di comando è nota con buona precisione (incertezza trascurabile) mentre la variabile di uscita presenta una maggiore incertezza

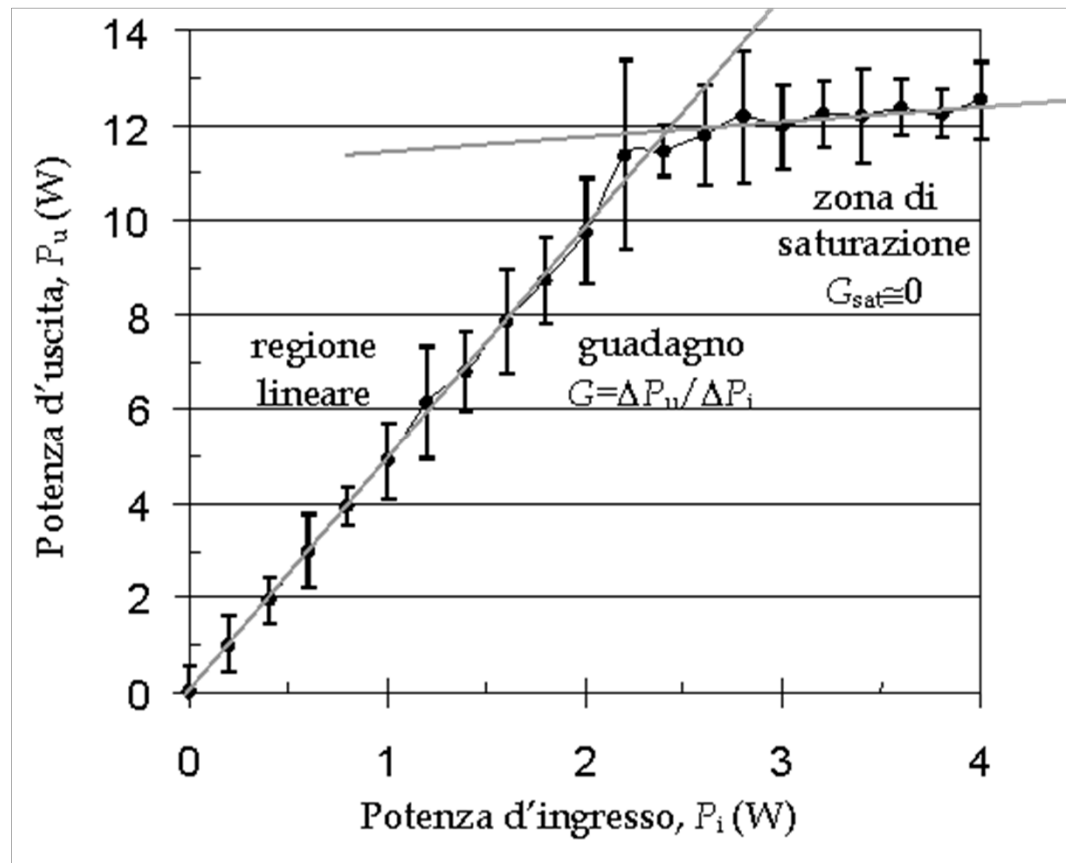
Molte volte le incertezze di ingressi e uscite non sono specificate ma insieme al rumore sui dati si traducono in una “dispersione dei punti sperimentali”

Caratteristica tensione corrente per un diodo Zener



Rappresentazione grafica della dispersione (incertezza): Barre di Errore

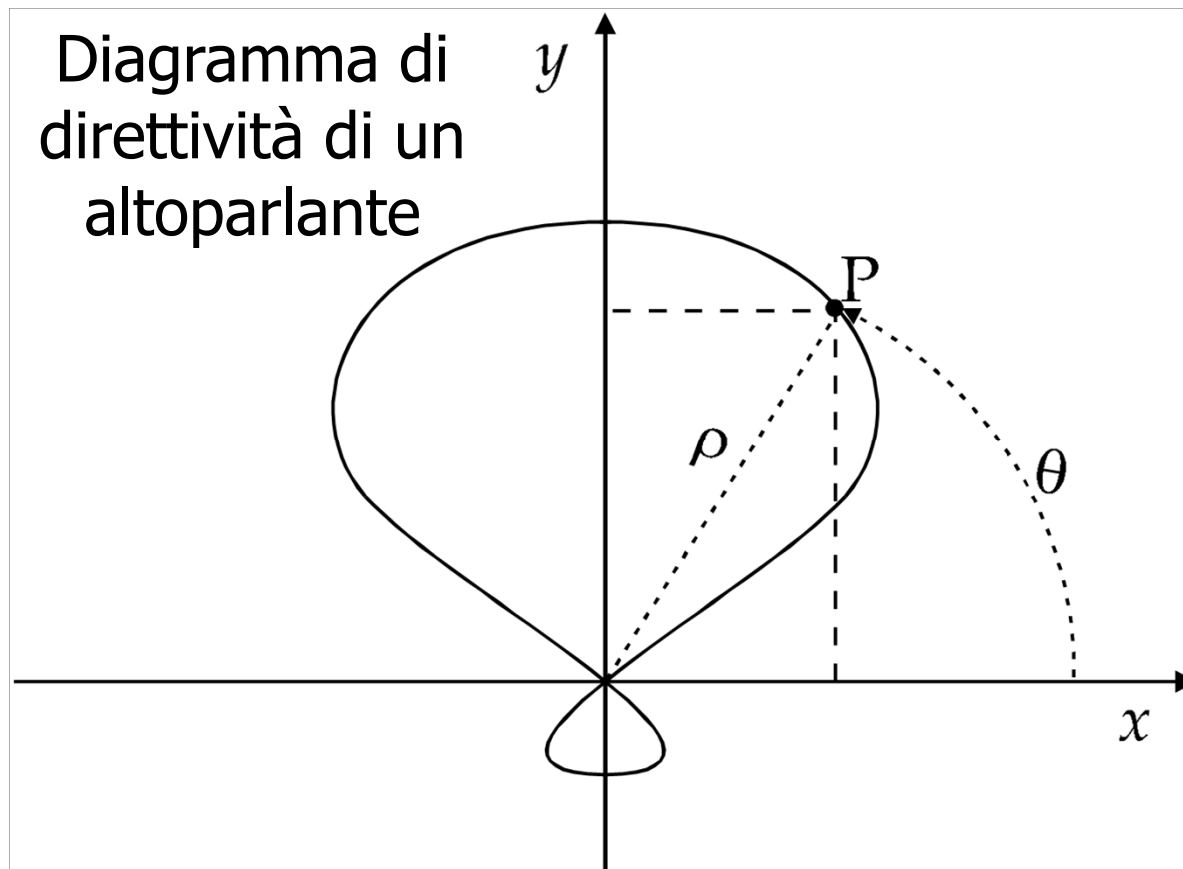
Caratteristica ingresso-uscita di un amplificatore elettronico. Le barre di errore indicano un intervallo di confidenza, che va specificato: ad esempio $\pm 1\sigma$ (68%), oppure ad esempio il 90%.



Diagrammi polari

Coordinata radiale $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$

Coordinata angolare $\theta = \arctg(y/x)$ per $x \geq 0$



$$x = \rho \cos(\theta)$$

$$y = \rho \sin(\theta)$$

$\rho(\theta)$ può anche indicare la potenza irradiata da un'antenna

Scale logaritmiche

Utili per visualizzare grandezze che variano di diversi ordini di grandezza, con dettaglio relativo costante: punti equispaziati in scala logaritmica stanno in uno stesso rapporto in scala lineare.

$$z \mid_{\log} = \log_B(z/z_0) \quad B \text{ è la base e } z_0 \text{ è il riferimento}$$

Molto comuni dB e dBm (con $B=10$)

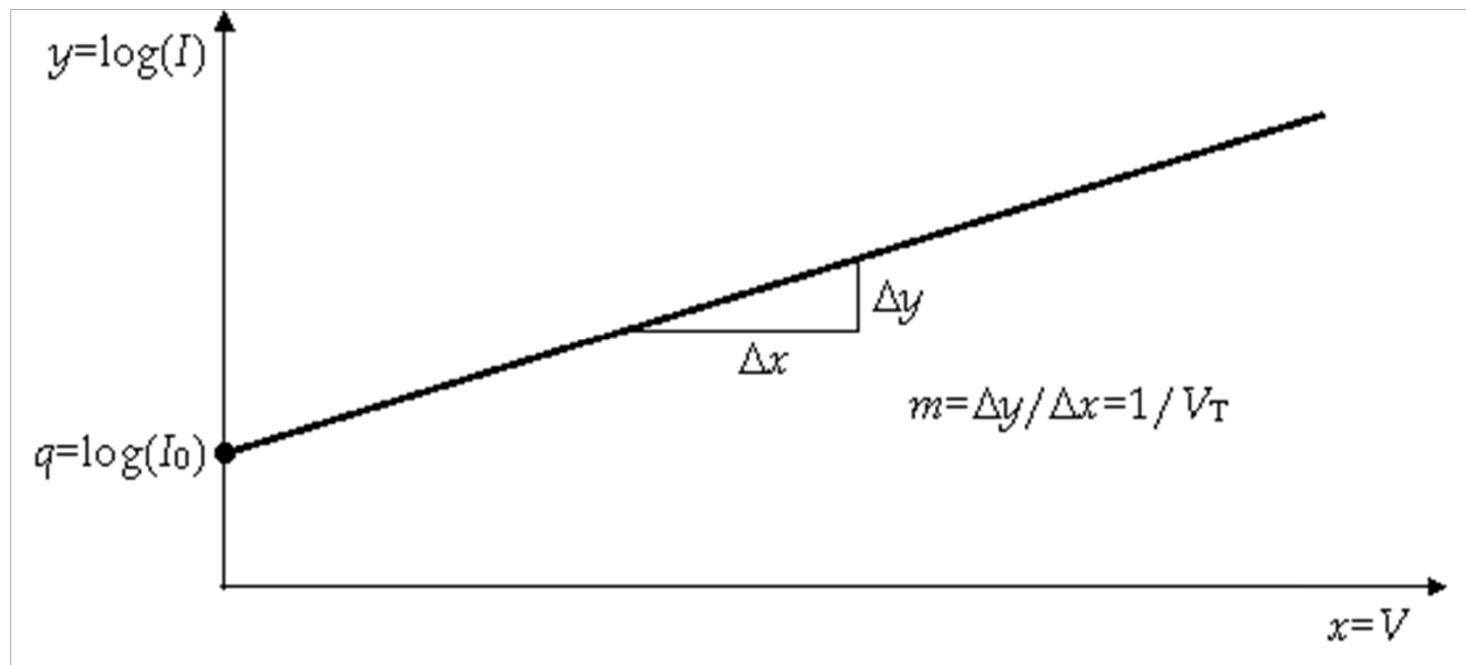
$$P \mid_{\text{dB}} = 10 \log_{10}(P/P_0)$$

$$A \mid_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(A/A_0)$$

$$P \mid_{\text{dBm}} = 10 \log_{10} [P/(P_m)] \quad \text{con } P_m = 1 \text{ mW}$$

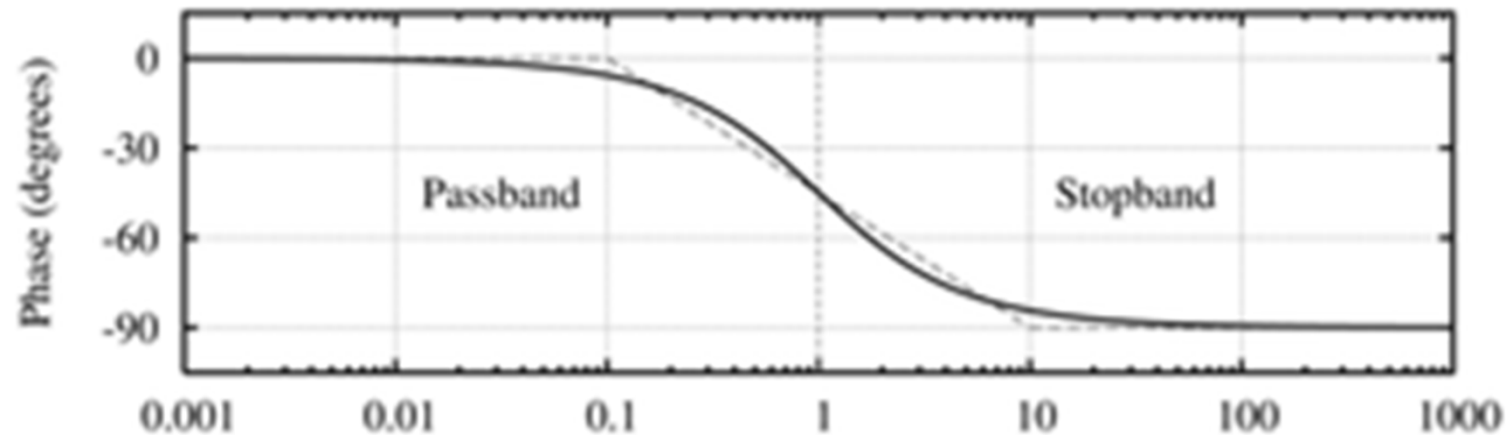
Diagrammi Semilogaritmici (log-lin)

Diagramma semilog- y per la curva I - V di un diodo a semiconduttore in polarizzazione diretta: $I=I_0\exp(V/V_T)$



$$y = \log(I) = (1 / V_T) \times V + \log(I_0) = mx + q$$
$$m = (1 / V_T) \quad q = \log(I_0)$$

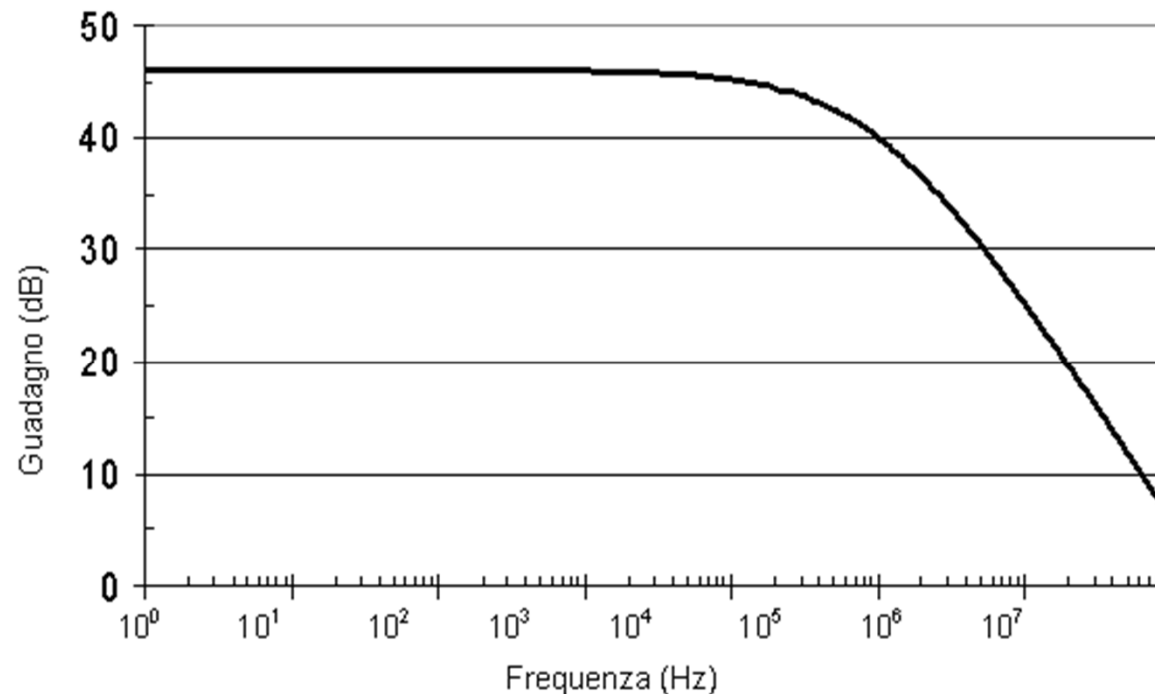
Diagrammi Semilogaritmici (lin-log): diagramma di Bode (della fase)



← 6 decadi (da 1 mHz a 1 kHz) →

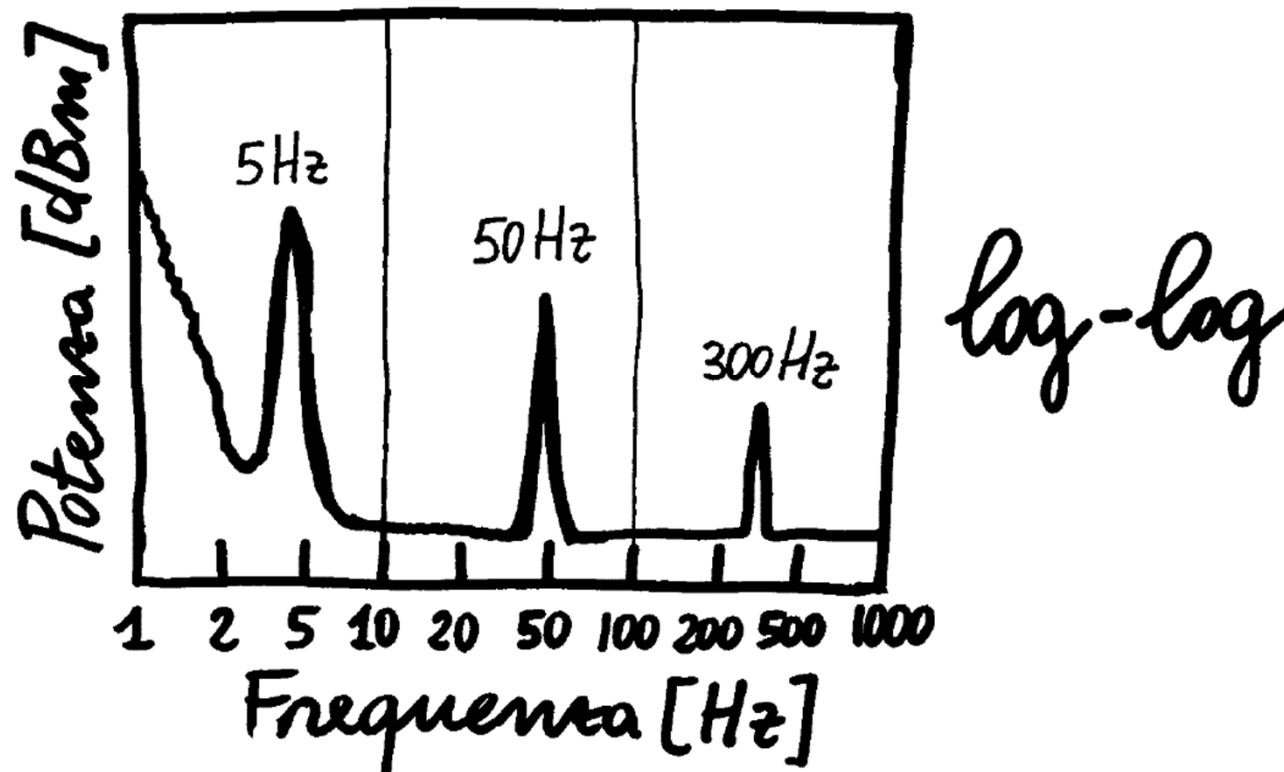
Sfasamento in gradi o radianti in funzione della frequenza riportata in scala logaritmica (ampia dinamica).

Diagrammi Bilogaritmici (log-log): diagramma di Bode (dell'ampiezza)



Ampiezza o guadagno in dB in funzione della frequenza riportata in scala logaritmica: si possono individuare delle pendenze tipiche (e.g. -20 dB/dec).

Diagrammi Bilogaritmici (log-log): spettro di potenza di un segnale



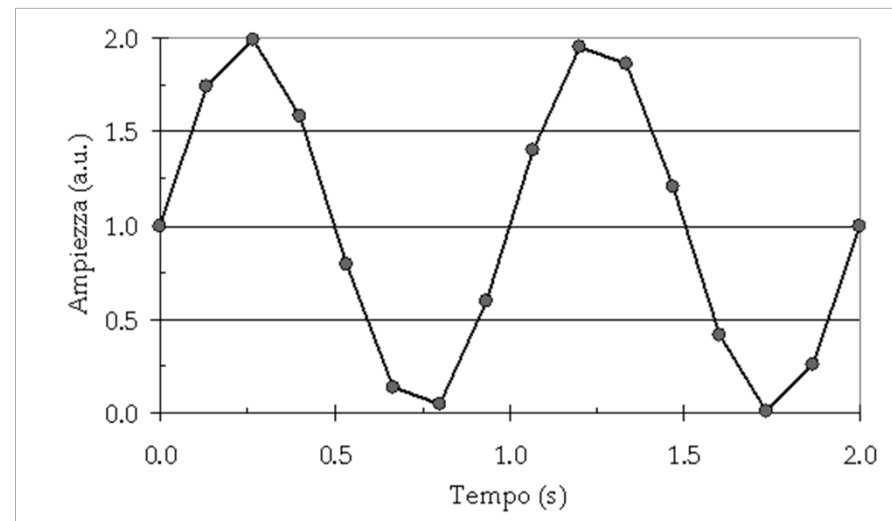
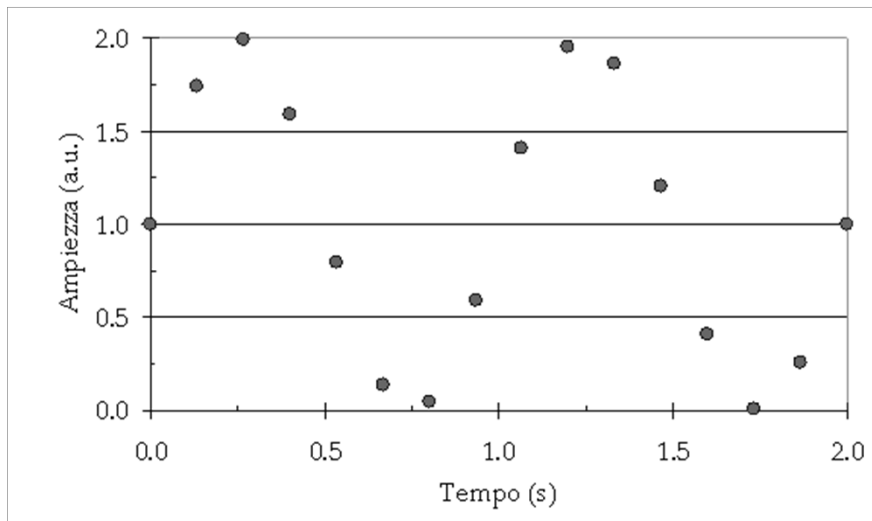
Ampia dinamica di frequenze e potenze visualizzabili sullo stesso diagramma.

Interpolazione

- Misura: insieme finito e discreto di valori sperimentali.
- Questi punti sperimentali discreti sono tipicamente i valori assunti dal misurando al variare di uno o più parametri di comando (grandezza/ e di ingresso).
Oppure sono i campioni discreti prelevati nel tempo.
- La rappresentazione è più facilmente leggibile se operiamo un “riempimento” o interpolazione tra due punti sperimentali adiacenti.
- Interpolante: è una funzione continua, che passando per i due punti in questione ci fornisce l'andamento presunto (interpolato) della relazione ingresso-uscita.

Interpolazione lineare

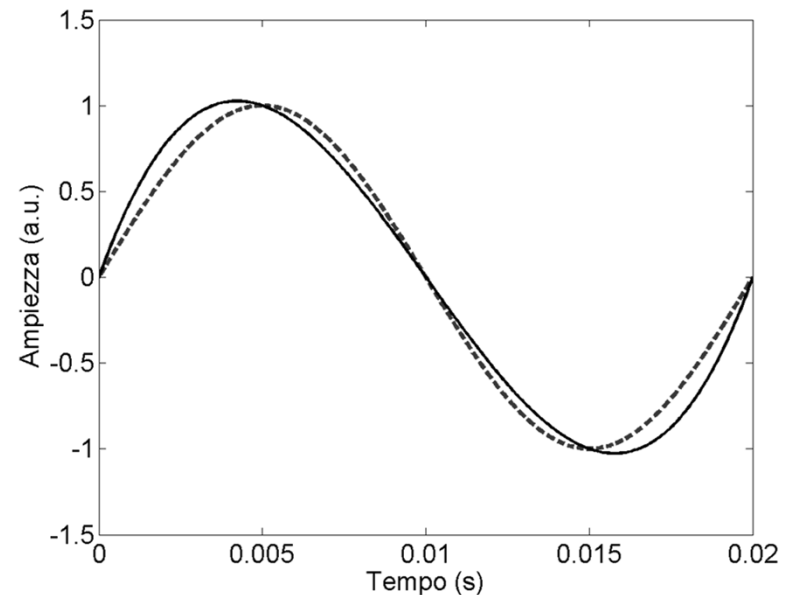
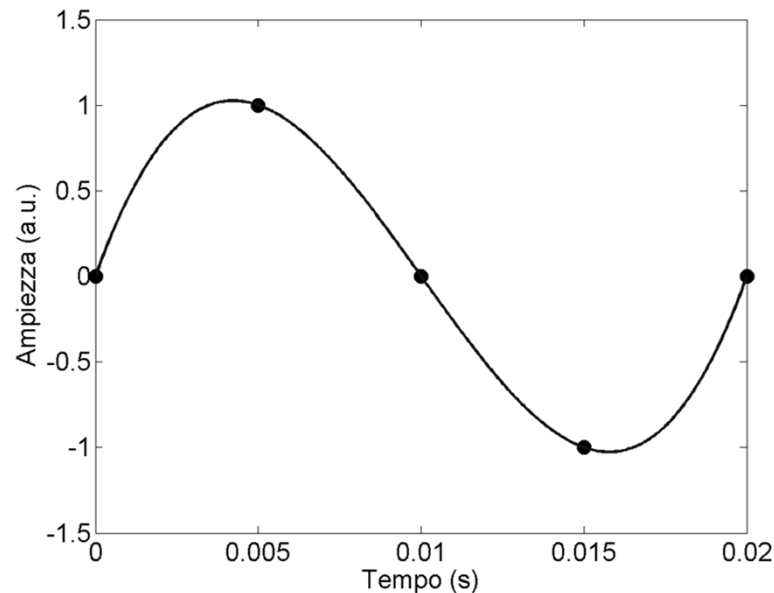
È la più semplice interpolazione possibile: consiste nel congiungere i punti con una spezzata (insieme dei segmenti di rette che passano per due punti adiacenti).



Non consente una buona ricostruzione del segnale perché non sfrutta l'informazione dei punti precedenti e successivi.

Interpolazione polinomiale cubica

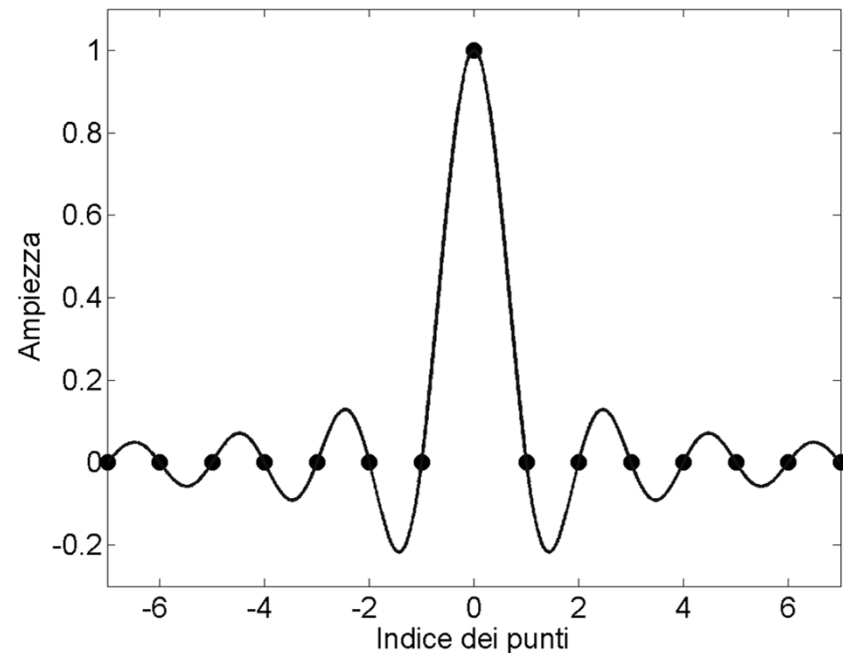
È la curva che passa per i punti sperimentali, mantenendo continue la derivata prima e seconda.



Ha l'effetto visivo di una "linea smussata". Può essere ottenuta con differenti condizioni al contorno (nei due punti estremi dell'intervallo di dati disponibili).

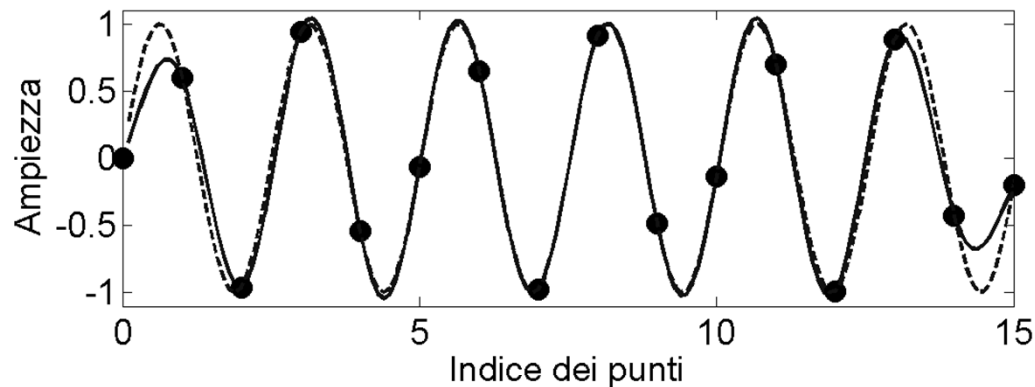
Interpolazione a seno cardinale

- Utilizzata per la ricostruzione di segnali campionati nel tempo.
- Si ricava matematicamente dall'operazione di filtraggio passa-basso ideale del segnale campionato.
- Nel dominio del tempo consiste in una convoluzione del segnale campionato con la funzione $\text{sinc}(\pi x) = \sin(\pi x) / \pi x$

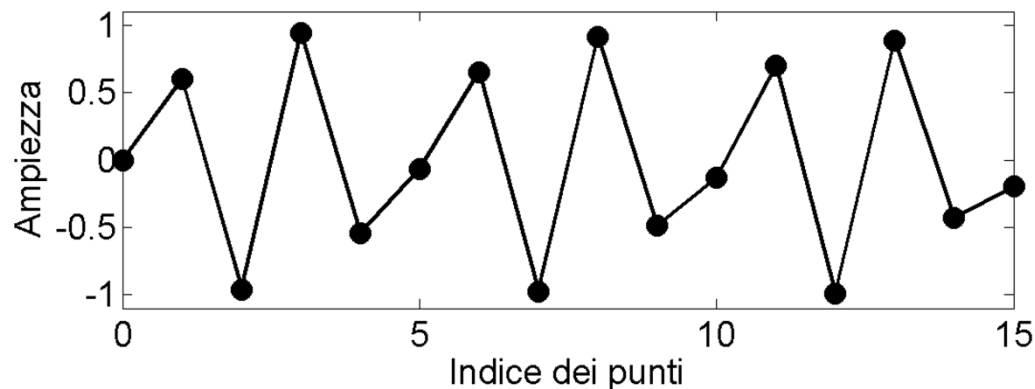


Esempio di ricostruzione di un segnale mediante interpolatore

Sinusoide campionata a 2.51 punti per periodo



Interpolatore
sinc(x)



Interpolatore
lineare

Regressione di più punti sperimentali

- Un **diagramma sperimentale**, ottenuto da risultati di misura, spesso mostra una dipendenza $y = f(x)$ che appare ragionevolmente approssimabile con una **funzione nota**
- Alternativamente, da un' **analisi teorica**, possiamo conoscere quale tipo di **relazione matematica (modello)** dovrebbe essere rappresentata dai punti, ma la dispersione dei dati è talmente grande (*e.g.* per la presenza di rumore) che non riusciamo a definire con sufficiente affidabilità i **valori dei parametri**
- Come è possibile **ricavare questi valori (parametri caratteristici del fenomeno misurato) da una misura/osservazione di più punti?**

Regressione ai minimi quadrati (LS)

- Consideriamo una generica dipendenza di una variabile fisica y da un'altra variabile x , attraverso una funzione f con più parametri A, B, \dots : $y = f(A, B, \dots, x)$
- Effettuiamo quindi n misure y_i della variabile y in funzione della variabile x osservata nei punti x_i
- Per stimare i parametri che meglio rappresentano la realtà misurata, definiamo una funzione “distanza” tra la misura e la funzione f . Si vuole minimizzare tale distanza
- La funzione “distanza” più comunemente usata è la somma degli scarti quadratici tra f e il valore misurato
- Scarto: $\delta_i = y_i - f(x_i)$
- Funzione “distanza” da minimizzare:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \delta_i^2$$

Regressione lineare LS (1/2)

Un importante caso di regressione, semplice da risolvere analiticamente, è quello della regressione lineare:

Consideriamo una dipendenza lineare $y = m x + b$ di cui si vogliono ricavare i due parametri m e b .

Per il punto i -esimo di misura, lo scarto δ_i tra il valore empirico, y_i , e quello della curva di regressione, $f(x_i)$, vale

$$\delta_i = y_i - [m x_i + b]$$

Dobbiamo trovare i **valori dei parametri (m e b) per i quali è minima la “distanza”**

$$\Phi(m, b) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (m x_i + b)]^2$$

Regressione lineare LS (2/2)

Per trovare il minimo di Φ , annulliamo le due derivate prime parziali rispetto a m e b :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m} = 0 \Rightarrow \left(m \sum x_i^2 \right) + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \Rightarrow \left(m \sum x_i \right) + nb = \sum y_i$$

dove tutte le sommatorie sono ovviamente estese per i che va da 1 fino a n .

Si è ottenuto un sistema lineare di due equazioni in due incognite, m e b appunto.

Regressione lineare: calcolo di m e b

La soluzione del sistema (che si ottiene facilmente per sostituzione) è:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum y_i - m \sum x_i}{n} = \bar{y} - m\bar{x}$$

Questa soluzione corrisponde a un minimo (lo si può dimostrare matematicamente facendo le derivate seconde, entrambe >0 , oppure ripensando al significato della funzione “distanza”, intrinsecamente positiva e che cresce allontanandosi dai punti acquisiti...)

Esercizio su retta di regressione (1/2)

$n(=5)$ misure di $y=f(x)$ con punti sperimentali

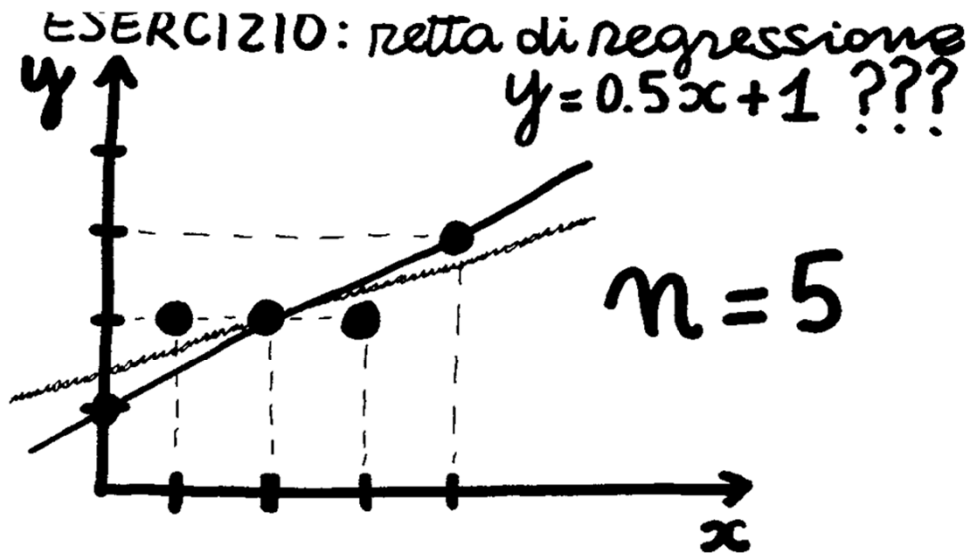
i	1	2	3	4	5	x_i	y_i
						0	1
$x_i = [$	0	1	2	3	4]	1	2
						2	2
$y_i = [$	1	2	2	2	3]	3	2
						4	3

Modello lineare $\delta_i = y_i - [m x_i + b]$

Regressione ai minimi quadrati $\rightarrow \sum(\delta_i)^2 = \text{“min.”}$

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum y_i - m \sum x_i}{n} = \bar{y} - m \bar{x}$$

Esercizio su retta di regressione (2/2)



x_i	y_i
0	1
1	2
2	2
3	2
4	3

Modello: $y = mx + b$ retta di regr.

$$m = \frac{5(0+2+4+6+12) - 10 \times 10}{5(0+1+4+9+16) - (10)^2} = \frac{20}{50} = 0.4$$

$$b = \frac{10 - 0.4 \times 10}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$$