INCERTEZZA

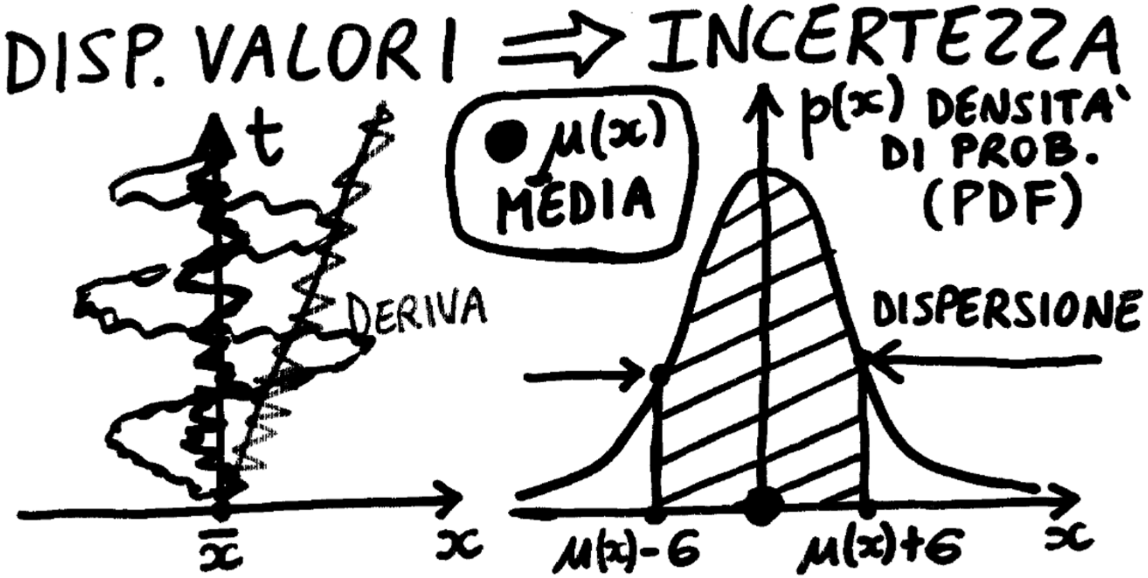
DI

MISURA

prof. Cesare Svelto

Variabilità delle misure

<u>Misure ripetute dello stesso parametro fisico non forniscono lo stesso valore</u>



tendenza centrale ($\overline{x}$ o μ) e dispersione (σ)

L'incertezza di misura è la stima della <u>dispersione</u> dei <u>valori "attribuibili" al misurando</u>

Approccio statistico

<u>La misurazione non è una scienza esatta</u>

Le misure sono sempre affette da "fluttuazioni" o errori (almeno potenziali), mai perfettamente conoscibili, che si traducono in una naturale "indeterminazione" o **INCERTEZZA sul risultato di misura**

Occorre lasciare un approccio deterministico (si vorrebbero <u>conoscere le fluttuazioni</u>)

in favore di un **approccio statistico** grazie al quale **<u>è possibile</u> <u>stimare le fluttuazioni</u>**

Incertezza di misura

La variabilità del risultato di una misura è analizzata grazie ai metodi consolidati della statistica (varianza e deviazione standard)

il risultato di misura dunque non è mai un unico numero "deterministico" ma un **intervallo di valori possibili** entro il quale il misurando può trovarsi con una data probabilità (e potrà anche trovarsi fuori dall'intervallo)

La **semiampiezza di un particolare intervallo** di valori (l'intervallo a ±1 deviazione standard dal valore centrale) è l'**incertezza di misura**

Teoria degli errori

La **teoria degli errori di misura** prevedeva che un misurando non potesse mai essere perfettamente conosciuto a causa degli inevitabili errori di misura (intrinseci in ogni metodo o strumento utilizzato per la misurazione)

NON CONOSCIBILE

<u>Errore = Valore Misurato – Valore Vero</u>

(concetto astratto)

INDETERMINATO!!!

VALORE NOTO

Tipi di errori

Errori sistematici: si presentano nella stessa entità ogni volta che si ripete la misura (*offset* o polarizzazione)

esempio: ogni volta che un peso di massa m viene posto su una bilancia digitale questa legge "sistematicamente" 100 g in più (*offset*) rispetto al valore m

Errori accidentali: si presentano in maniera diversa e "impredicibile" ogni volta che si ripete la misura (fluttuazione casuale a media nulla)

esempio: ogni volta che il peso di prima è posto sulla bilancia, il visualizzatore digitale mostra un valore diverso ($m + 100\ \mathrm{g} + \varepsilon_i$), ad esempio a causa del rumore elettronico sulla tensione di lettura inviata al *display* ($\Sigma\varepsilon_i=0$)

Problematiche

Errori sistematici ed errori accidentali non sono della stessa natura:

- i primi sono <u>componenti deterministiche</u> (e pertanto conoscibili e anche eliminabili)
- i secondi sono <u>componenti aleatorie</u> (stimabili in senso statistico e talora riducibili ma mai eliminabili del tutto)

Questi due tipi di errori non possono essere combinati/sommati in maniera corretta (si sommano solo le grandezze omogenee ma anche "logicamente" dello stesso tipo)

<u>es.</u>: lunghezza automobile ; calibro fucile ; profondità piscina

Errori → Incertezza

Date le incongruenze logiche della teoria degli errori, a fine anni ‘70 il CIPM incaricò un Gruppo di Lavoro di definire procedure unificate per l’espressione dell’incertezza di misura

Una corretta analisi statistica della variabilità di una misura consente di risolvere in maniera soddisfacente il problema di esprimere l’**incertezza standard di misura** **(parametro, valutato secondo procedure convenzionali, che esprime il nostro grado di non conoscenza del misurando)**

2 categorie di stima dell’incertezza

A - stimata con metodi statistici (su un insieme, o campione, di misure ripetute)

B - stimata in altro modo (*e.g*. conoscenze a priori o proprietà dello strumento)

Richiami di probabilità

$p \in$ [0 e 1] (evento impossibile e evento certo)

X variabile casuale (VC) con valori $x \in \{\Re\}$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$ PROBABILITA'

$p(x)$ funzione densità di probabilità (PDF)

La PDF descrive il processo casuale considerato assegnando la probabilità per i possibili valori d'uscita. Per una VC continua la "probabilità puntuale" è nulla mentre può non essere nulla la **probabilità di cadere in un intervallo di valori**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$$ normalizzazione della PDF

Richiami di statistica

Per X VC reale (possibili valori della misura) esistono degli stimatori che ci consentono di conoscere, in senso statistico, alcuni parametri caratteristici del processo casuale. In particolare MEDIA e VARIANZA permettono di stimare la tendenza centrale e la dispersione dei valori x associabili a X

MEDIA

$$\mu(x) = \mu_x = E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,\mathrm{d}x$$

VARIANZA

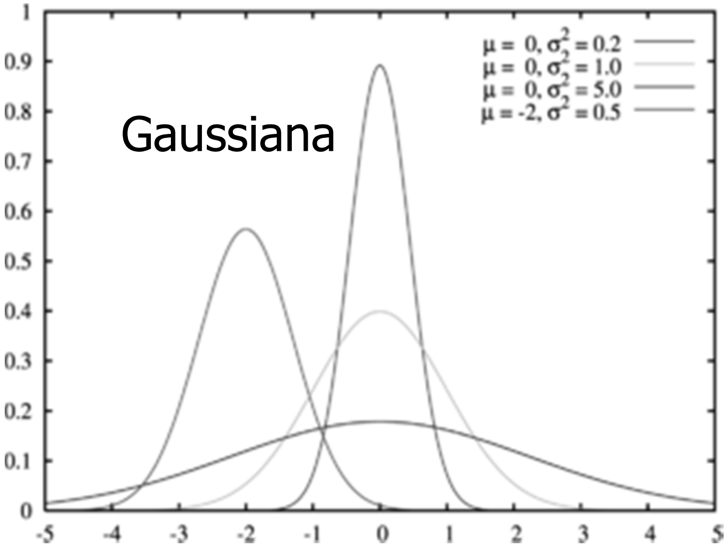
$$\sigma^2(x) = \sigma_x^2 = E\left\{[x - \mu_x]^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \mu_x]^2\, p(x)\,\mathrm{d}x$$

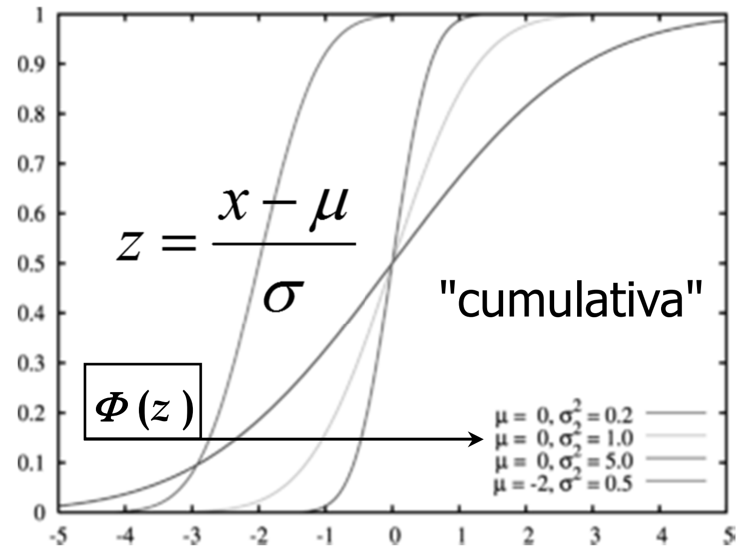
$\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)}$ **DEVIAZIONE STANDARD**

PDF normale o gaussiana

E′ la PDF "più comune" per la descrizione della media di fenomeni casuali quali le misure (per il teorema del limite centrale <u>la media di una VC tende ad avere una PDF gaussiana</u> in una "approssimazione dei grandi numeri "):

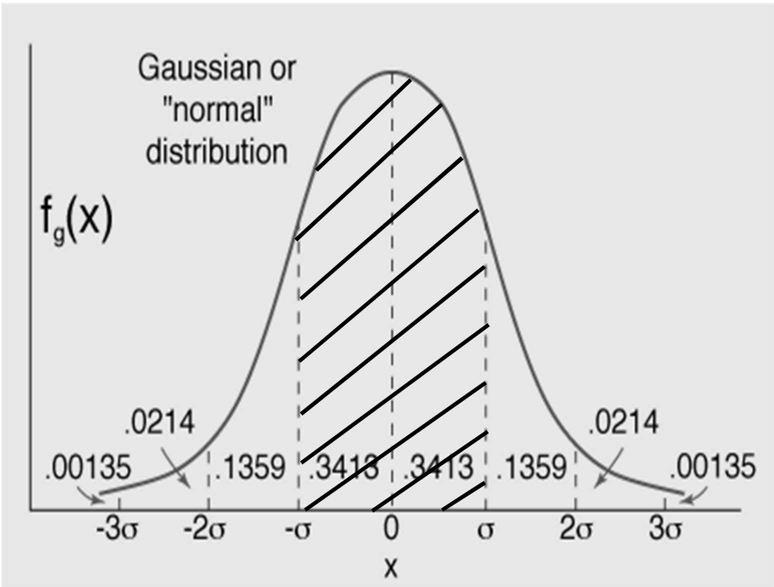
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{ -\frac{[x-\mu]^2}{2\sigma^2} \right\}$$





Probabilità di "cadere" in un intervallo

Integrando la PDF gaussiana tra due valori sull'asse reale si trova la **probabilità** che il risultato (misura) "cada" (sia) nell'intervallo compreso tra i due valori considerati



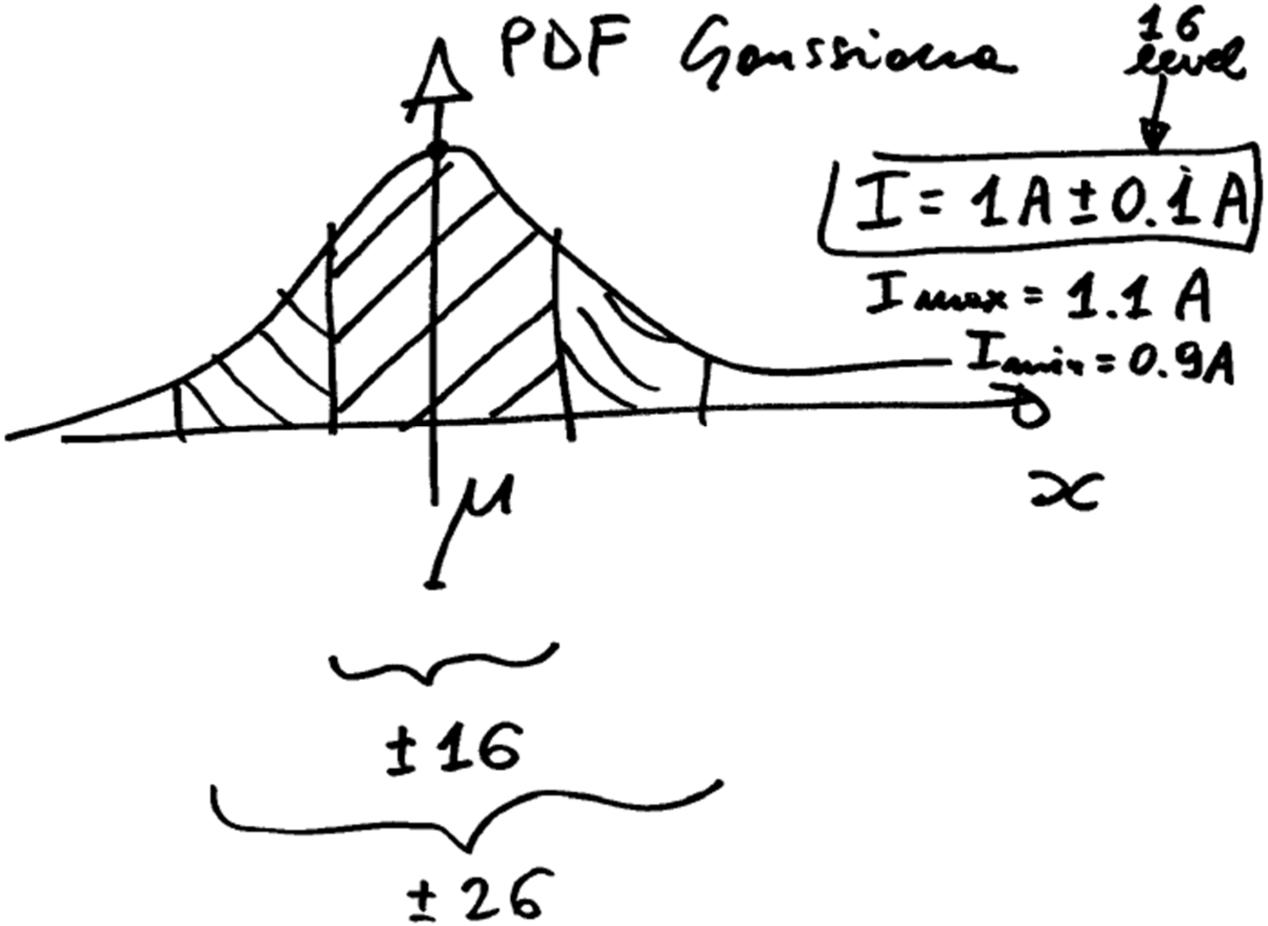
Le AREE sottese dalla curva PDF sono le probabilità di avere valori (misure) in un dato intervallo di valori sull'asse reale

Lontano dalla media μ, rispetto alla larghezza σ, la PDF diviene molto bassa e dunque le aree sottese molto piccole (misure improbabili)

$$\text{Livelli di confidenza} \begin{cases} 1\sigma & 68.27\% \cong 68.3\% \sim 68\% \\ 2\sigma & 95.45\% \cong 95.5\% \sim 95\% \\ 3\sigma & 99.73\% \cong 99.7\% \end{cases}$$

$$e.g.\ P\ [\ (\mu_x - \sigma_x) \le x \le (\mu_x + \sigma_x)\ ] \cong 68.3\%$$

Esempio di PDF gaussiana



misura di corrente (di valore nominale 1 A e incertezza 0.1 A)

Incertezza standard

Per qualsiasi misura si definisce:

incertezza standard o scarto tipo, con simbolo "*u*" dall'inglese *uncertainty*, una stima della deviazione standard σ, radice quadrata della varianza σ^2, prevista per il valore di misura

A seconda del metodo impiegato per la stima di $u(\cdot)$ classificheremo questa incertezza come di categoria A o B

Media campionaria

Variabile X [misurando] nota attraverso n determinazioni [misure] x_k (k=1,2,…,n) ottenute <u>in condizioni di ripetibilità</u>:

STIMA del valor medio della (intera) popolazione, $\mu(x)$, attraverso lo stimatore

MEDIA CAMPIONARIA

$$\bar{x} = \bar{x}_k \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$\mu(x) = \mu_x \stackrel{\Delta}{=} E[x] \stackrel{S}{=} \bar{x} = \bar{x}_k$$

$\stackrel{S}{=}$ uguale nel senso della Stima

Dimostrazione

Dim.

$$\boxed{E\{\,\bar{x}\}} = E\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right\} =$$

$$= \frac{1}{n} E\left\{\sum_{k=1}^{n} x_k\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\{x_k\} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\{x\} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu(x) =$$

$$= \frac{1}{n} n\mu(x) = \boxed{\mu(x)}$$

Dispersione della media

Per misure ripetute di una grandezza X la miglior stima del valore di misura x coincide con il valor medio delle misure ripetute:

$$x = \bar{x} = \bar{x}_k \quad \text{VALORE DI MISURA}$$

Per determinare la dispersione (incertezza) sul valore di misura dovremo valutare la dispersione, almeno potenziale, della variabile casuale $\bar{x}$ ("valore di misura"). Dunque <u>cercheremo $\sigma(\bar{x})$</u> che, come vedremo, risulta funzione di $\sigma(x)$ e del numero n di misure ripetute

Varianza campionaria

STIMA della varianza della (intera) popolazione, $\sigma^2(x)$, attraverso lo stimatore

VARIANZA CAMPIONARIA

$$s^2(x) = s^2(x_k) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$$

$$\sigma^2(x) = \sigma_x^2 \stackrel{\Delta}{=} E\left[(x-\mu)^2\right] \stackrel{S}{=} s^2(x) = s^2(x_k)$$

inoltre: $s^2(x) = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - n\bar{x}^2\right]$

metodo alternativo di calcolo varianza camp.

Alternativa di calcolo per la varianza

La varianza campionaria di n valori x_k si può anche calcolare come somma dei singoli valori, elevati al quadrato, meno n volte il valor medio, al quadrato, il tutto diviso per n-1:

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - n\bar{x}^2\right]$$

DIM: $\sum (x_k - \bar{x})^2 = \sum \left(x_k^2 - 2x_k\bar{x} + \bar{x}^2\right) =$

$$= \left(\sum x_k^2\right) - 2\bar{x}\left(\underline{\underline{\sum x_k}}\right) + n\bar{x}^2 =$$

$$= \left(\sum x_k^2\right) - n\bar{x}^2$$

$n\bar{x}$

Gradi di libertà della stima

Nella varianza campionaria, il denominatore **n-1=ν è il numero di gradi di libertà**

Vediamo 3 validi motivi per cui è opportuno dividere la somma degli n scarti quadratici, che compare nell'espressione della varianza campionaria, per n-1 e non per n

1) Non ha alcun senso calcolare la varianza per un campione che contenga un solo dato (n=1). In tale caso, dividendo per n-1, otteniamo come $s^2(x)$ una forma indefinita del tipo 0/0

2) Nella formula di $s^2(x)$ calcoliamo di fatto gli scarti quadratici dalla media campionaria, x (nota), e non dalla media della popolazione, μ_x, che è ignota: dunque degli n scarti quadratici sommati solo n-1 sono tra loro indipendenti

3) Si dimostra che il valore atteso della varianza campionaria, con l'n-1 al denominatore, è la varianza della popolazione:

$$E\{\, s^2(x) \,\} = \sigma^2(x)$$

lo stimatore è corretto o non polarizzato

Dimostrazione

DIM: $$\boxed{E\left\{ s^2(x) \right\}} = \frac{1}{n-1} E\left\{ \left(\sum_k x_k^2 \right) - 2\bar{x} \sum_k x_k + n\bar{x}^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{ \left(\sum_k x_k^2 \right) - \frac{2}{n} \sum_k x_k \sum_k x_k + n \left(\frac{1}{n} \sum_k x_k \right)^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{ \left(\sum_k x_k^2 \right) - \frac{1}{n} \sum_k x_k \sum_k x_k \right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{ \left(\sum_k x_k^2 \right) - \frac{1}{n} \sum_k x_k^2 - \frac{1}{n} \sum_{k \neq j} x_k x_j \right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right) \sum_k E\left\{ x_k^2 \right\} - \frac{1}{n} \sum_{k \neq j} E\left\{ x_k \right\} E\left\{ x_j \right\} \right] =$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[\left(\frac{n-1}{n} \right) n \left[\mu^2(x) + \sigma^2(x) \right] - \frac{n(n-1)}{n} \mu^2(x) \right] =$$

$$= \mu^2(x) + \sigma^2(x) - \mu^2(x) = \boxed{\sigma^2(x)}$$

$E\{x_k x_j\} = E\{x_k\} E\{x_j\}$ se x_k e x_j sono statisticamente indipendenti

$$x_k = \mu_x + \left(x_k - \mu_x \right)$$

$$E\left(x_k^2 \right) = \mu_x^2 + \sigma_x^2$$

Incertezza di cat. A (1/2)

Per determinare l'incertezza sul valore di misura valutiamo la deviazione standard della variabile casuale $\bar{x}$:

$\bar{x}$ è, almeno potenzialmente, una variabile casuale in quanto il suo valore specifico dipende dal particolare campione di dati considerato. Se disponessimo di *m* diversi insiemi di *n* misure ripetute e per ciascuno calcolassimo la $\bar{x}$ corrispondente, otterremo *m* valori di $\bar{x}$ differenti tra loro, la cui varianza è:

$$\sigma^2(\bar{x}) = \sigma^2\left(\frac{1}{n}\sum_k x_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_k \sigma^2(x_k) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2(x) = \frac{\sigma^2(x)}{n}$$

La miglior stima di $\sigma^2(\bar{x})$ si ottiene quindi come:

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2(x)}{n} \overset{S}{=} \frac{s^2(x)}{n} \quad \text{e} \quad \sigma(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

Incertezza di cat. A (2/2)

Si definisce **incertezza di categoria A** la dispersione del valor medio delle misure ripetute, calcolabile come

$$u_{\mathrm{A}}(x) = s(\overline{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{x}\right)^2}$$

Nel caso di incertezza solo di categoria A, il risultato di misura è allora $x = \overline{x} \pm s(x)/\sqrt{n}$ con una qualità della misura che migliora (l'incertezza diminuisce) al crescere di *n*

Incertezza relativa

Parleremo di **incertezza relativa** quando normalizziamo il valore di incertezza tipo al valore di misura

$$u_{\mathrm{r}}(y) = \frac{u(y)}{\bar{y}} \qquad [1] \text{ numero puro!}$$

Incertezze relative anche di grandezze diverse (non omogenee) possono essere confrontate direttamente fra loro.

L'inc. rel. indica, indipendentemente dal valore e tipo del misurando, il grado di conoscenza che abbiamo raggiunto sul valore di misura

Incertezza estesa

Quando si vuole definire un intervallo di valori, attorno al valore di misura $y = \overline{y}$, "all'interno del quale si ritiene che il misurando debba cadere con un certo livello di confidenza (probabilità P)", si utilizza l'**incertezza estesa**

$$U(y) = k\,u(y)$$

k fattore di copertura

valori tipici k = "1"; 2; 3 (68%; 95%; 99.7%)

Cifre significative per l'incertezza

L'incertezza si esprime con una o al più due cifre significative: esiste infatti anche un'incertezza dell'incertezza e di norma non ha senso impiegare più di due cifre significative per $u(x)$

Nell'arrotondamento di una incertezza si deve sempre **arrotondare per eccesso** a meno che l'arrotondamento per difetto non comporti un errore inferiore al 5%

Nei calcoli e passaggi intermedi, tuttavia, conviene conservare anche più di due cifre significative

Esercizio: calcolo inc. cat. A (1/5)

Si dispone di $n = 10$ misure ripetute V_k di una tensione incognita V.

Calcolare V e $u_A(V)$

k [1]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_k [V]	7	9	8	6	7	5	7	8	6	7

Esercizio: calcolo inc. cat. A (2/5)

$$V = \overline{V} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k = \frac{1}{10}\,70\ \text{V} = 7\ \text{V}$$

1ª

$$u_A(V) = \frac{s(V)}{\sqrt{n}} =$$

2ª

$$= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(V_k - \overline{V}\right)^2} =$$

3ª

$$= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} V_k^2\right) - n\overline{V}^2\right]}$$

Esercizio: calcolo inc. cat. A (3/5)

2ª espressione per $u_A(V)$

Calcoliamo prima gli scarti $\left(V_k - \overline{V}\right)$

$\left(V_k - \overline{V}\right)$[V]	0	2	1	-1	0	-2	0	1	-1	0

per poi ricavare

$$u_A(V) = \sqrt{\frac{1}{10 \times 9}\left(0+4+1+1+0+4+0+1+1+0\right)\mathrm{V}^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{12}{90}\ \mathrm{V}^2} \cong 0.37\ \mathrm{V}$$

Esercizio: calcolo inc. cat. A (4/5)

3ª espressione per $u_A(V)$

si calcola $\sum_{k=1}^{N} V_k^2 = 502\ \mathrm{V}^2$ e $\overline{V} = 7\ \mathrm{V}$

$$u_A(V) = \sqrt{\frac{1}{10 \times 9}\left[502\ \mathrm{V}^2 - 10 \times 49\ \mathrm{V}^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{12}{90}\ \mathrm{V}^2} \cong 0.37\ \mathrm{V}$$

Esercizio: calcolo inc. cat. A (5/5)

1ª espressione per $u_A(V) = \dfrac{s(V)}{\sqrt{n}}$

dobbiamo prima conoscere o calcolare la radice della varianza campionaria (dev.st. camp.)

$s(V) = 1.1547\ \mathrm{V}$ e poi dividere per $\sqrt{n}$

$$u_A(V) = \frac{1.1547\ \mathrm{V}}{\sqrt{10}} \cong 0.37\ \mathrm{V}$$

MA perché 0.365148… = 0.37 ?
E se fosse stato 0.364321… ?

Cifre significative nel risultato di una misura

Con i numeri dell'esercizio precedente:

V = 7.00 V ±0.37 V oppure V = 7.00(37) V

o anche, in modo più approssimato:

V = 7.0 V ±0.4 V

Altro esempio: $\overline{V}$=5289 V e $u(V)$=300 V=3.0×10^2 V

V = 5290 V ±300 V =$529(30)\times10^1$ V

o anche, in modo più approssimato ma rapido:

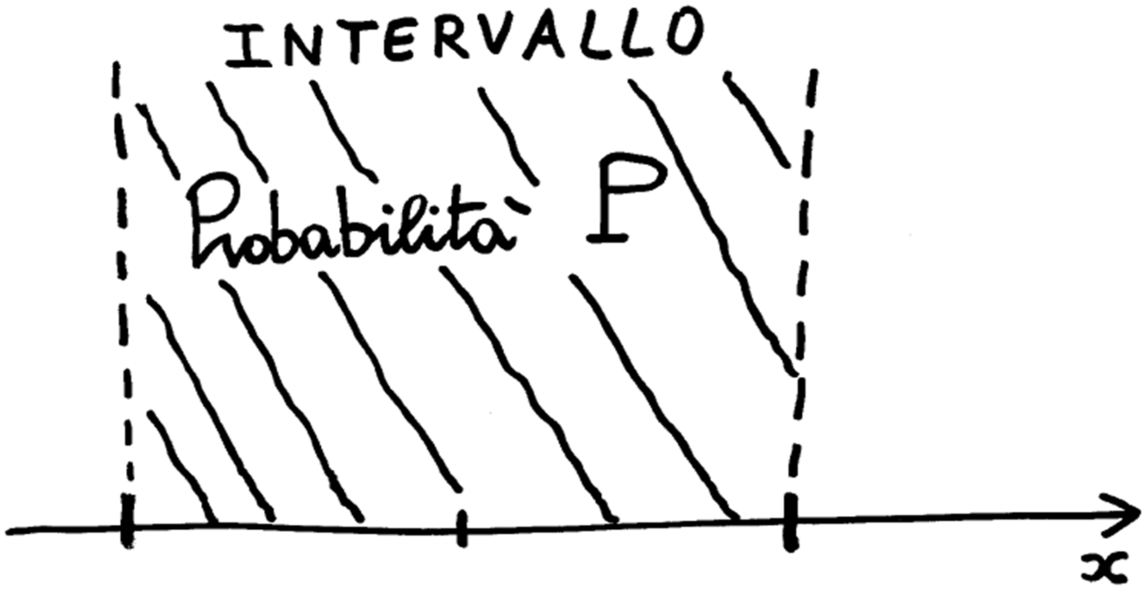
V = (5.3 ±0.3) kV

E se fosse $u(V)$=0.37 V come nel caso precedente?

V = 5289.00 V ±0.37 V oppure V = 5289.00(37) V

Incertezza di categoria B

Si basa sulla definizione “a priori” di un opportuno intervallo di valori entro il quale si suppone debbano cadere i valori del misurando (con una data probabilità)



Es. $\boldsymbol{V_{\mathrm{rete}}}$

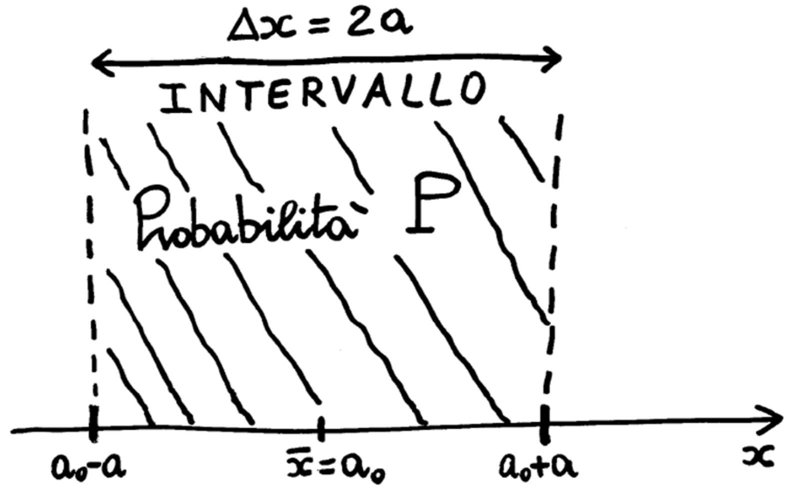
Parametri dell'intervallo

L'intervallo fissato è tipicamente centrato attorno al **valor medio**

$$\bar{x} = a_0 = \frac{(a_0 + a) + (a_0 - a)}{2}$$

e ha una piena larghezza

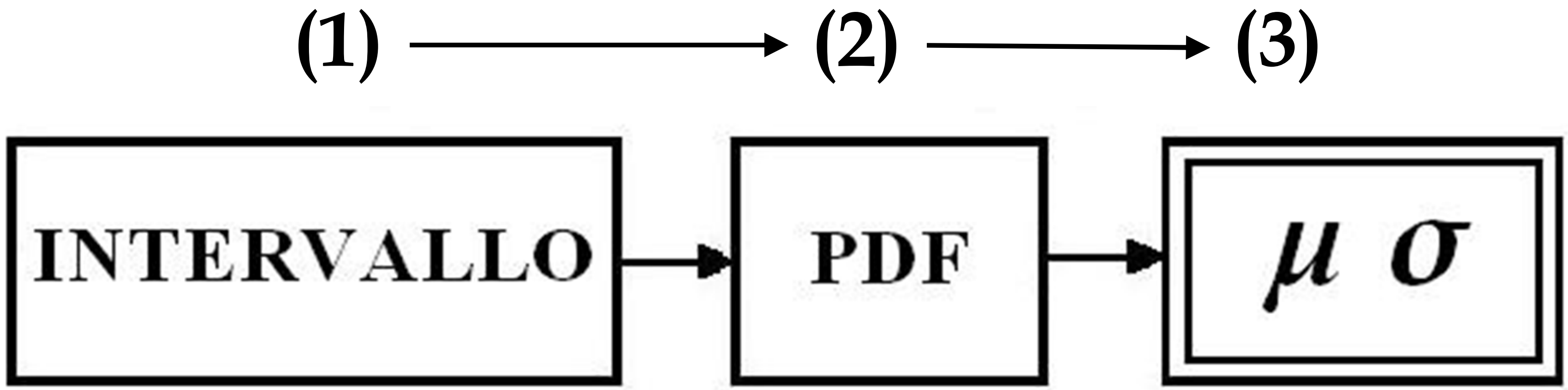
$$\Delta x = (a_0 + a) - (a_0 - a) = 2a$$



Alla **larghezza Δx** sarà legata l'**incertezza della misura**

Stima dell'incertezza di categoria B

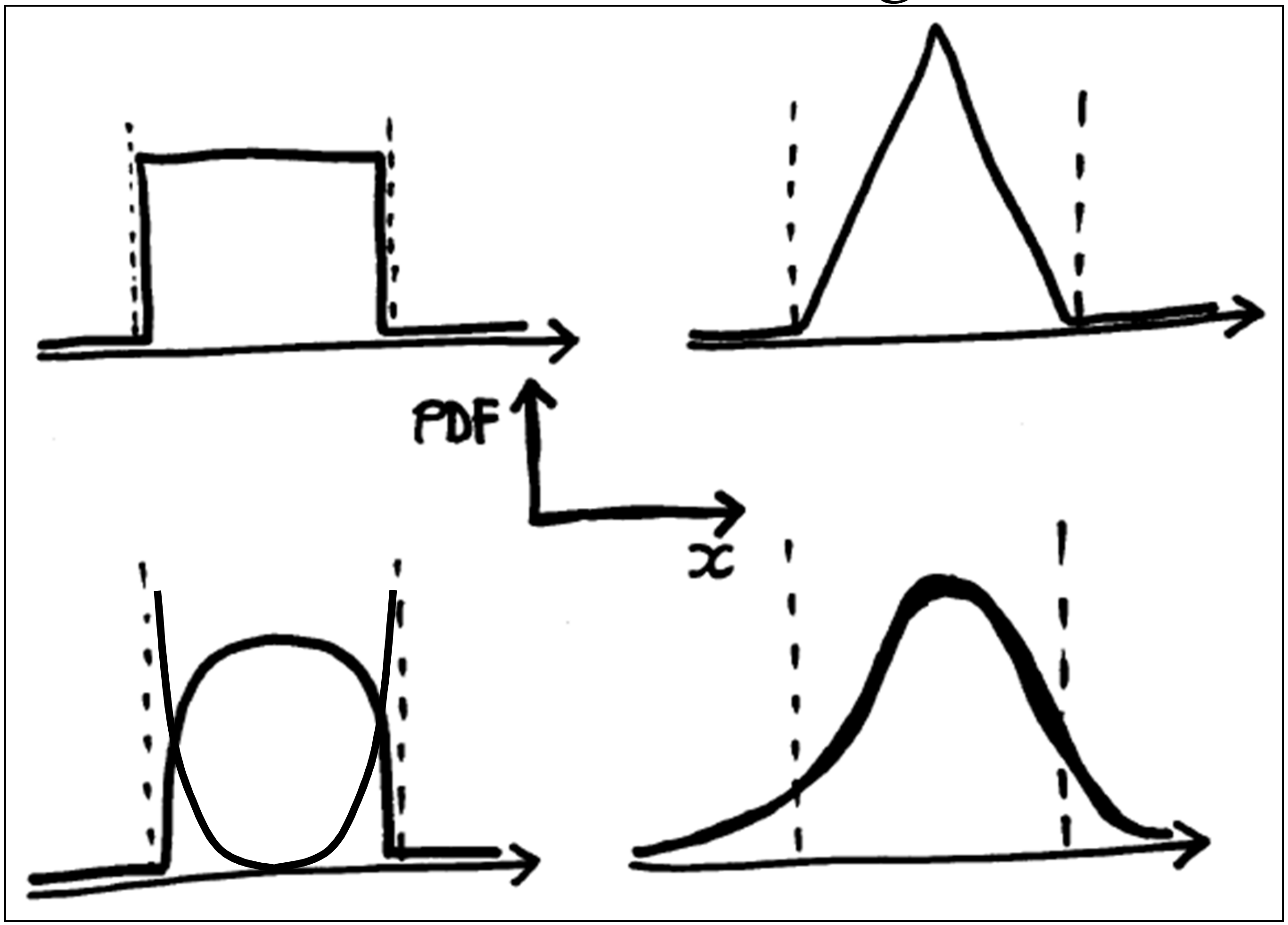
3 PASSI:



1) definito un <u>intervallo</u> di categoria B
2) si associa una densità di probabilità (<u>PDF</u>)
3) di questa si calcolano media, varianza e <u>deviazione standard</u>

Esempi di PDF comuni

uniforme triangolare



a “U” gaussiana

Scelta di intervallo e PDF

Tanto la larghezza dell'intervallo quanto la PDF ad esso associata si scelgono sulla base di:

- precedenti conoscenze o dati di misura
- esperienza sul comportamento del misurando
- specifiche dei costruttori di materiali e strumenti coinvolti nella misura
- dati di calibrazioni
- informazioni da articoli scientifici/tecnici
- incertezza sui parametri di riferimento (presa dai manuali o da altre fonti)

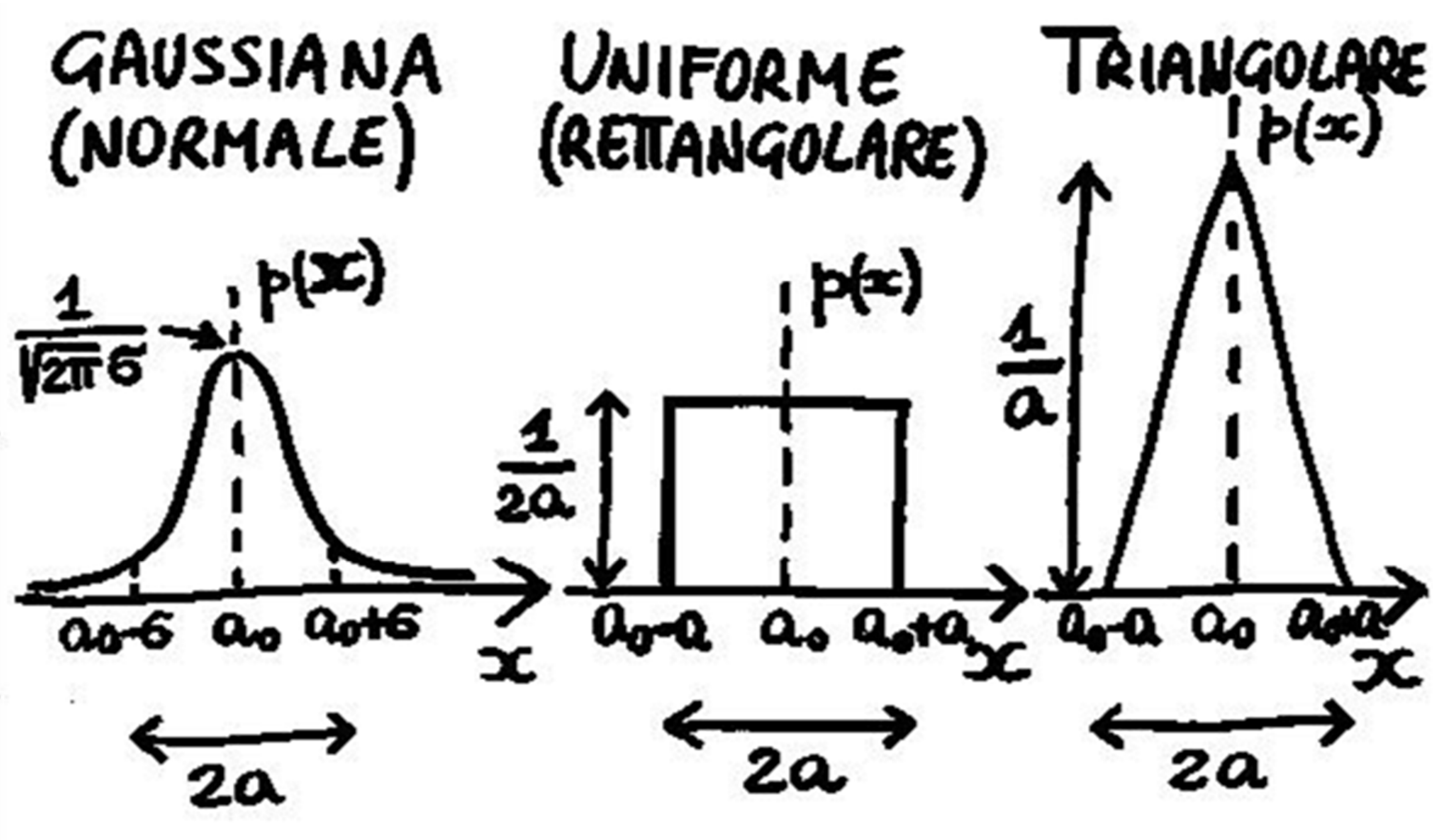
Stima di $u_B(x)$

Quando si dispone di una PDF per la grandezza x, è possibile calcolare $\mu(x)$ e $\sigma(x)$ che danno, rispettivamente, il valore di misura e la sua incertezza:

$$x = x_{\mathrm{MIS}} = \mu(x)$$

$$u_{\mathrm{B}}(x) = \mathrm{INC}_{\mathrm{B}}(x) = \sigma(x)$$

PDF più comuni



PDF normale

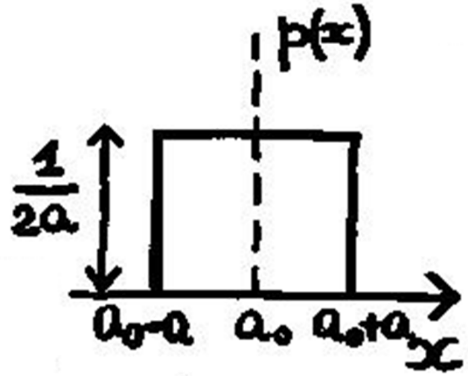
Già si dispone di $\mu(x)$ e $\sigma(x)$, dalla espressione della PDF. Occorre ricordare, o calcolare, che:

1σ *level*: $P[\ \mu\text{-}\sigma \leq x \leq \mu+\sigma\ ] \approx 68.3\%$

2σ *level*: $P[\ \mu\text{-}2\sigma \leq x \leq \mu+2\sigma\ ] \approx 95.5\%$

3σ *level*: $P[\mu\ \text{-}3\sigma \leq x \leq \mu+3\sigma\ ] \approx 99.7\%$

PDF uniforme (1/2)



$$p(x) = \begin{cases} 0 & x < a_0 - a \\ 1/2a & a_0 - a \le x \le a_0 + a \\ 0 & x > a_0 + a \end{cases}$$

$$\Delta x = 2a$$

E' immediato verificare che:

$$\mu(x) = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx = a_0$$

$$\sigma(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}}$$

PDF uniforme (2/2)

$$\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_0-a}^{a_0+a} x \frac{1}{2a}\,\mathrm{d}x$$

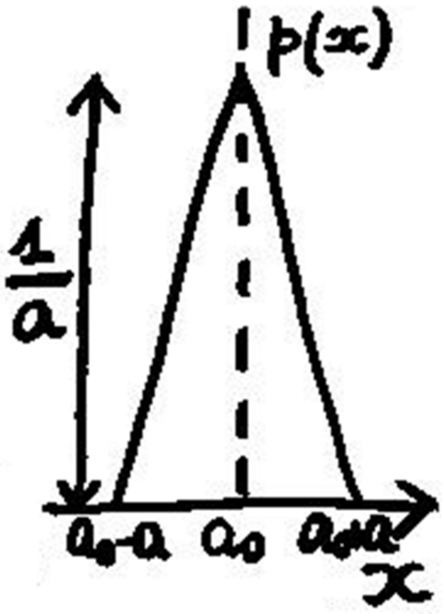
$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{a_0-a}^{a_0+a} = \frac{1}{2a}\frac{2a_0a + 2a_0a}{2} = a_0$$

$$\sigma^2(x) = E\left[(x-\mu(x))^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu(x))^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{a_0-a}^{a_0+a} (x-a_0)^2 \frac{1}{2a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\left[\frac{(x-a_0)^3}{3}\right]_{a_0-a}^{a_0+a} =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{a^3}{3} - \left(-\frac{a^3}{3}\right)\right] = \frac{a^2}{3} = \frac{(\Delta x)^2}{12} \qquad \sigma_{\mathrm{UNI}}(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}}$$

PDF triangolare



$$\mu(x) = a_0$$

$$\sigma^2(x) = \frac{a^2}{6} = \frac{(\Delta x)^2}{24}$$

$$\sigma(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{24}}$$

A pari larghezza Δx, si ha naturalmente che

$$u_{\text{B,triangolare}}(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{24}} < u_{\text{B,uniforme}}(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}}$$

infatti <u>la PDF$_{\text{Tri}}$ è "meno dispersa" della PDF$_{\text{Uni}}$</u>

Altri metodi di stima di $u_\mathrm{B}(x)$ (1/2)

- Si calcola $u_\mathrm{B}(x)$ partendo dalla conoscenza di un **intervallo di confidenza con probabilità *P***:

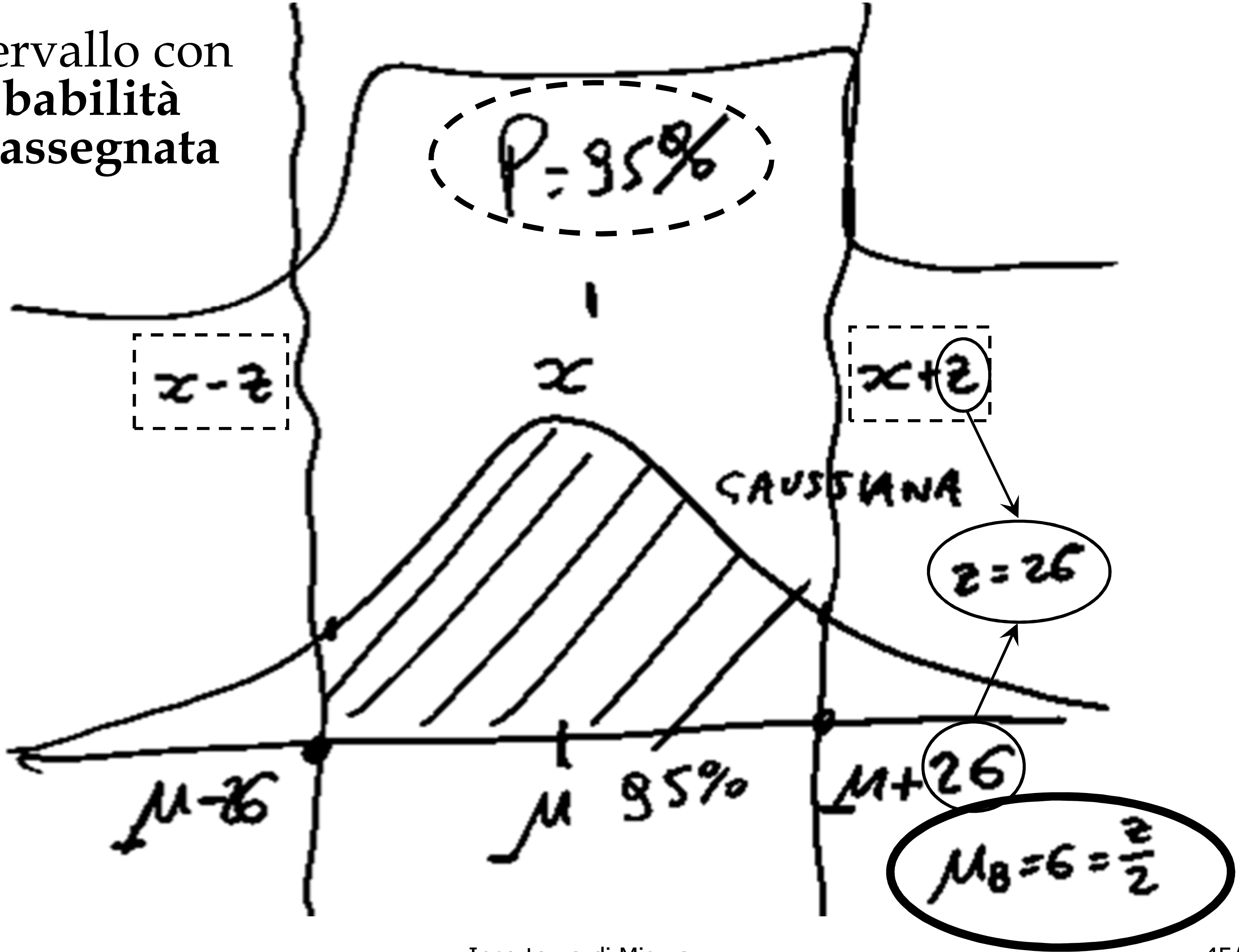
  si usa PDF normale con confidenza *P*, centrata sul valore centrale dell'intervallo, e si stima
  $\boldsymbol{u_\mathrm{B}(x) = \sigma(x) = \sigma_x}$ **Es. V_{rete}**

- Si calcola $u_\mathrm{B}(x)$ partendo da conoscenza di una **INCERTEZZA ESTESA ($U_\mathrm{B} = k\, u_\mathrm{B}$)**:

  già si conosce il fattore di copertura k
  e quindi si ricava $\boldsymbol{u_\mathrm{B}(x) = U_\mathrm{B}(x)/k}$ **Es. …**

Altri metodi di stima di $u_B(x)$ (2/2)

- Intervallo con **Probabilità preassegnata**



Misure dirette e indirette

MISURE DIRETTE:

$y = x$ *e.g.*: misura di V con un voltmetro

$$\boxed{u^2_C = u^2_A + u^2_B \quad \textbf{Incertezza Composta}}$$

MISURE INDIRETTE:

$$\boxed{\textbf{INC = ???}}$$

$y = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_N)$

$P = RI^2$ *misura ottenuta da R e I (no wattmetro)*

$P = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]I^2 = f\,(I, R_0, \alpha, T)$

Misure indirette (definizioni)

Misurando $\boldsymbol{Y = f\,(X_1, X_2, \ldots, X_N)}$ **ricavato <u>"indirettamente"</u>** dalla conoscenza di N altre grandezze (**<u>parametri di ingresso</u>**)

La funzione $\boldsymbol{f\,(X_i)}$ prende il nome di **<u>relazione funzionale (equazione della misura)</u>**

Y e X_i sono le variabili mentre y e x_i i valori

Naturalmente **da**lla conoscenza dei **valori degli ingressi** è possibile ricavare il **<u>valore dell'uscita</u>**: $\boxed{\boldsymbol{y=f(x_i)}}$

Saranno invece le **incertezze degli ingressi**, **opportunamente "combinate"**, a fornire l'**<u>incertezza dell'uscita</u>**: $\boxed{\boldsymbol{u_C(y)=\Phi[u(x_i);f(\cdot)]}}$

INC composta u_C in misure ind. (1/5)

Valori della relazione funz. (**<u>equazione della misura</u>**)

$$\boldsymbol{y = f\,(\,x_1, x_2, \ldots, x_N\,)}$$

In un intorno del valore di misura (**<u>punto di lavoro</u>**)

$$\bar{y} = f\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N\right)$$

è possibile <u>sviluppare in serie di Taylor (1° ordine)</u>
<u>la relazione funzionale *f*</u> :

$$\boxed{(y - \bar{y}) \cong \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{\bar{y}} (x_1 - \bar{x}_1) + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)_{\bar{y}} (x_N - \bar{x}_N)}$$

Scarto dell'uscita dal suo valor medio ≅ …

INC composta u_C in misure ind. (2/5)

Definiamo **coefficienti di sensibilità**

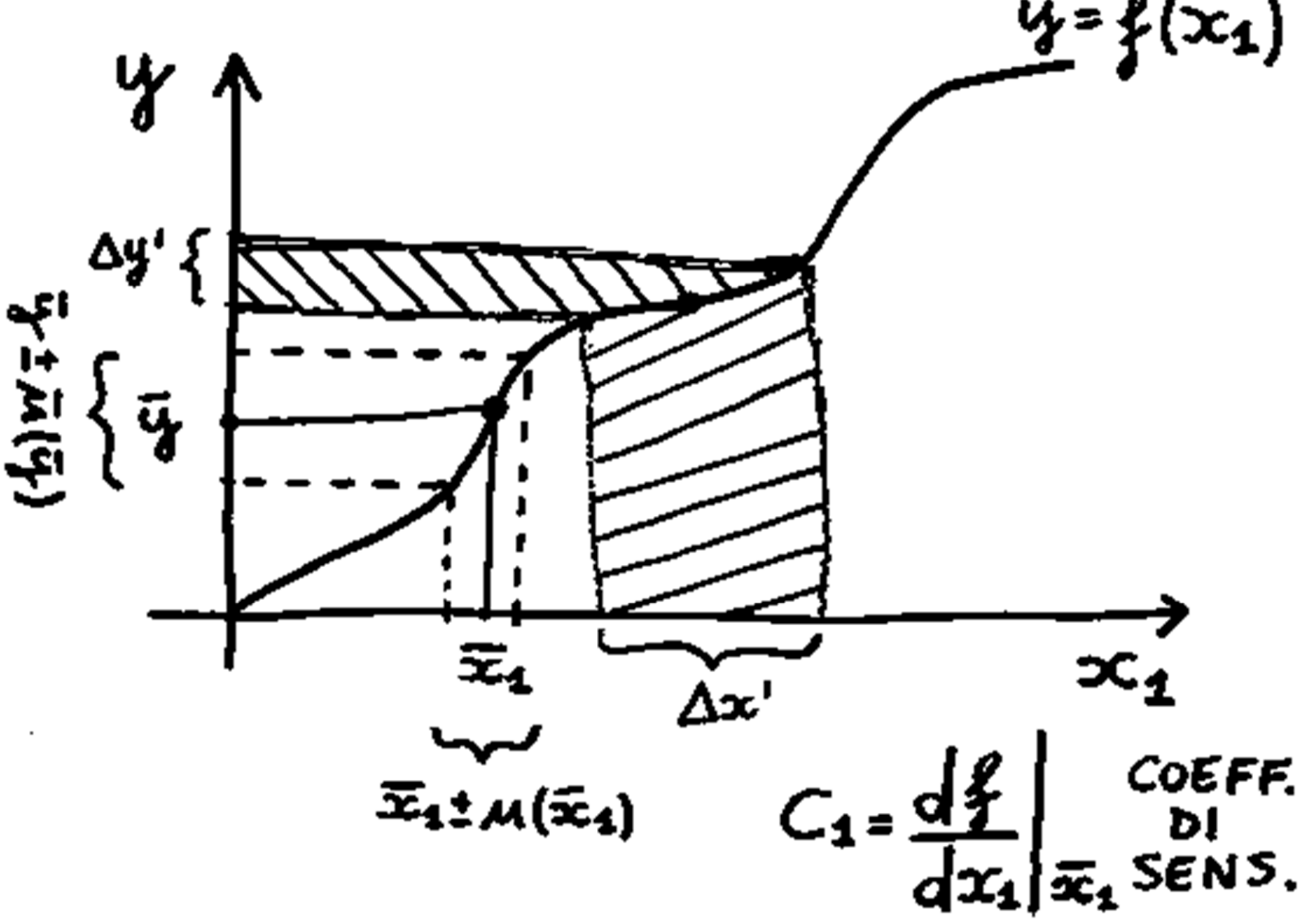
$$\boxed{c_i \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\overline{y}}}$$

coeff. "costante" una volta stabilito il punto di lavoro

le <u>derivate prime parziali della relazione funzionale rispetto alla variabile x_i</u>

c_i indica come varia il misurando Y in corrispondenza di una variazione del parametro X_i di dipendenza

INC composta u_C in misure ind. (3/5)



INC composta u_C in misure ind. (4/5)

$$E\left\{(y-\overline{y})^2\right\} = E\left\{\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i-\overline{x}_i)\right]\left[\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j-\overline{x}_j)\right]\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j)\right\} =$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\overline{y}}\right]^2(x_i-\overline{x}_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j)\right\}$$

$$E\left\{(x_i-\overline{x}_i)^2\right\} \stackrel{\Delta}{=} \sigma^2(x_i) = u^2(x_i)$$

VARIANZA o INCERTEZZA^2

$$E\left\{(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j)\right\} \stackrel{\Delta}{=} \sigma^2(x_i,x_j) = u(x_i,x_j)$$

COVARIANZA tra x_i e x_j

INC composta u_C in misure ind. (5/5)

(*espressione con le covarianze*)

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) u(x_i, x_j)$$

Somma pesata, con pesi c_i^2, delle incertezze (varianze) degli ingressi x_i più la somma dei termini di covarianza, sempre pesati con le derivate prime della relazione funzionale

Risultato della misura

Il **valore di misura** della grandezza Y è:

$$y = \overline{y} = f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_N\right)$$

con una **incertezza composta**:

$$u_{\mathrm{C}}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i, x_j)}$$

In generale ciascuna incertezza $u(x_i)$ è:

$$u_{\mathrm{C}}(x_i) = \sqrt{u_{\mathrm{A}}^2(x_i) + u_{\mathrm{B}}^2(x_i)} = \sqrt{s^2(\overline{x}_i) + u_{\mathrm{B}}^2(x_i)} =$$

$$= \sqrt{\frac{s^2(x_i)}{n} + u_{\mathrm{B}}^2(x_i)}$$

Coefficienti di correlazione

$$\boxed{r_{ij}(x_i, x_j) \stackrel{\Delta}{=} \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \quad \in [-1,+1]}$$

$$r_{ij} \stackrel{\Delta}{=} \frac{\sigma_{ij}^2}{\sigma_i \, \sigma_j}$$

STAT.

$r_{ij} = 0 \quad \Leftarrow \quad$ x_i e x_j statisticamente indipendenti

Utilizzando la definizione di r_{ij}, si può scrivere:

(*espressione con i coefficienti di correlazione*)

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} c_i \, c_j \, r_{ij} \, u(x_i) u(x_j)}$$

<u>INC</u> dell'uscita si ricava <u>da INC ingressi e da *f*</u> o c_i (e anche r_{ij})

Variabili statisticamente indipendenti

Nel caso di variabili d'ingresso statisticamente indipendenti tutti i termini di covarianza e i coefficienti di correlazione sono nulli ($r_{ij} \equiv 0$ tra le variabili x_i e x_j con $x_i \neq x_j$) e pertanto:

$$\boxed{u_{\mathrm{C}}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}}$$

$$u_{\mathrm{C}}^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)$$

combinazione di varianze

somma pesata

Casi particolari di rel. funzionali (1/2)

Casi particolari di relazioni funzionali per variabili d'ingresso X_i statisticamente indipendenti:

- Misurando somma o differenza delle x_i:

$$\bar{y} = n_1 \bar{x}_1 \pm \ldots \pm n_i \bar{x}_i \pm \ldots \pm n_N \bar{x}_N$$

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N} n_i^2 u^2(x_i)$$

Se inoltre $n_i = 1$ per ogni i, cioè la relazione funzionale è una somma e differenza semplice: $u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u^2(x_i)}$

Casi particolari di rel. funzionali (2/2)

- Misurando prodotto o rapporto delle x_i:

$$\overline{y} = \overline{x}_1^{n_1} \times \ldots \times \overline{x}_i^{n_i} \times \ldots \times \overline{x}_N^{n_N} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i^{\,n_i}\right) = n_i x_i^{\,(n_i - 1)} = x_i^{\,n_i}\left[n_i \frac{1}{x_i}\right]$$

$$u_{\mathrm{C}}^2(y) = \left(\overline{x}_1^{n_1}\overline{x}_2^{n_2}\ldots\overline{x}_N^{n_N}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}\left[n_i^2 \frac{1}{x_i^2}\right] u^2(x_i) = y^2 \sum_{i=1}^{N} n_i^2 \frac{u^2(x_i)}{x_i^2}$$

e dunque $\quad u_{\mathrm{r,C}}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} n_i^2 u_{\mathrm{r}}^2(x_i)}$

Se inoltre $n_i = \pm 1$ per ogni i, cioè se la relazione funzionale è espressa da **prodotti e rapporti** semplici, si ottiene:

$$\boxed{u_{r,C}^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_r^2(x_i)}$$

Esercizio: legge dei gas perfetti (1/4)

$$p = n\frac{RT}{V} = f(n,R,T,V)$$ Relazione funzionale

$R = 8.31\ \text{Pa}\cdot\text{m}^3/(\text{mol}\cdot\text{K})$ $u(R)$ "=" 0 (≅0!!!)

n = 2 mol $u_r(n) = 10^{-6}$

T = 300 K $u(T)$ = 0.1 K

$V = 1\ \text{m}^3$ da $V = L^3$ e $L = 1\ \text{m} \pm 1$ mm

Esercizio: legge dei gas perfetti (2/4)

$$p = \frac{2\ [\mathrm{mol}] \times 8.31\ \left[\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}^3 / \mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}\right] \times 300\ [\mathrm{K}]}{1\ [\mathrm{m}^3]} = 4986\ \ \mathrm{Pa} \cong 5\ \ \mathrm{kPa}$$

$$\boxed{V = L^3}$$

$$u(V) = \sqrt{\left[\frac{\partial V}{\partial L}\right]^2 u^2(L)} = \sqrt{\left[3\ \mathrm{m}^2\right]^2 \times \left[10^{-3}\ \mathrm{m}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{9 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^6} = 3 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$$

Conoscendo ora tutte le variabili/grandezze d'ingresso (valore e incertezza) possiamo calcolare l'INC della grandezza misurata indirettamente

Esercizio: legge dei gas perfetti (3/4)

$$\boxed{p = n\frac{RT}{V}}$$

$$u(p) = \sqrt{\left[\frac{\partial p}{\partial n}\right]^2 u^2(n) + \left[\frac{\partial p}{\partial T}\right]^2 u^2(T) + \left[\frac{\partial p}{\partial V}\right]^2 u^2(V)} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{RT}{V}\right]^2 u^2(n) + \left[\frac{nR}{V}\right]^2 u^2(T) + \left[\frac{nRT}{-V^2}\right]^2 u^2(V)} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{nRT}{V}\right]^2 \frac{u^2(n)}{n^2} + \left[\frac{nRT}{V}\right]^2 \frac{u^2(T)}{T^2} + \left[\frac{nRT}{-V}\right]^2 \frac{u^2(V)}{V^2}}$$

$$u_r(p) = \sqrt{u_r^2(n) + u_r^2(T) + u_r^2(V)}$$

Esercizio: legge dei gas perfetti (4/4)

$$u_r^2(n) = 10^{-12}$$

$$u_r^2(T) = \frac{(0.1\,\mathrm{K})^2}{(300\,\mathrm{K})^2} \cong 1.1 \times 10^{-7}$$

$$u_r^2(V) = \frac{\left(3 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3\right)^2}{\left(1\,\mathrm{m}^3\right)^2} \cong 9 \times 10^{-6}$$

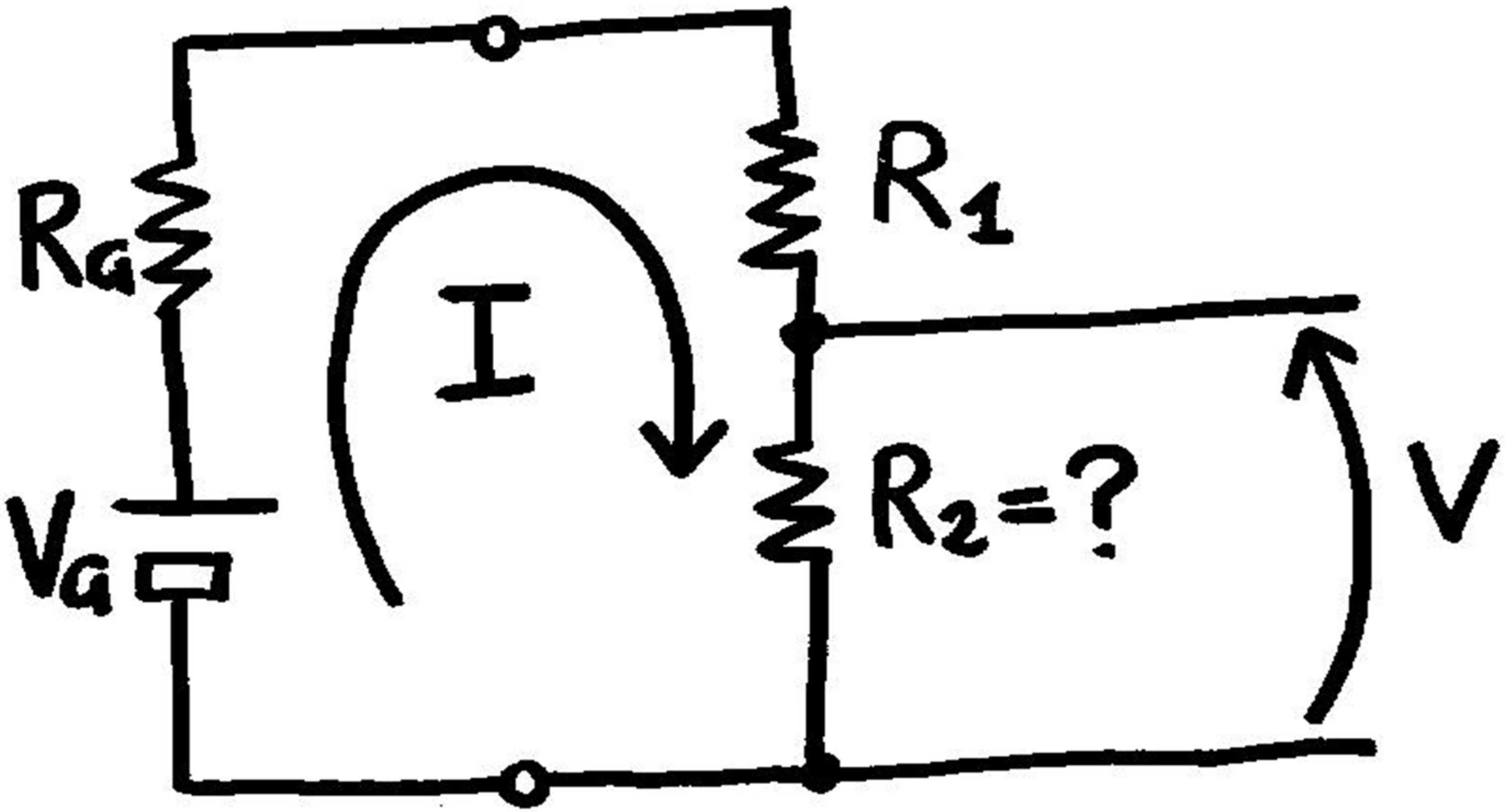
$$u_r(p) = \sqrt{10^{-6}\left(10^{-6} + 0.11 + 9\right)} \cong 3 \times 10^{-3} \quad \left[= u_\mathrm{r}(V)!!!\right]$$

$$u(p) = u_r(p) \times p = 14.9\ \mathrm{Pa} \cong 15\ \mathrm{Pa}$$

p = 4986 Pa ±15 Pa = 4986(15) Pa

Esercizio: circuito elettrico (1/13)

Calcolo dell'incertezza composta in una misura indiretta su un circuito elettrico



Esercizio: circuito elettrico (2/13)

- V_G è data pari a +12 V e $U(V_G)$ = 10 mV k = 2
- R_G è nota attraverso 10 letture ripetute $R_{G,k}$,
  $\overline{R}_{\mathrm{G}} = 50\,\Omega \qquad s\left(R_{\mathrm{G},k}\right) = 12.65\,\Omega$
- $R_1 = 1\,\mathrm{k}\Omega \pm 5\,\Omega$
- V = 7.77 V letta con un voltmetro a 3 ½ cifre, con ± 19.99 V di dinamica, e "ideale" (solo errore di quantizzazione)

Esercizio: circuito elettrico (3/13)

1) Calcolare l'incertezza assoluta e relativa di tutti i parametri coinvolti nella misura

2) Calcolare R_2, la sua incertezza e la sua incertezza relativa ($u(R_2)$ e $u_\mathrm{r}(R_2)$)

3) Quali parametri sono determinanti e quali sono trascurabili per il calcolo di $u(R_2)$?

Esercizio: circuito elettrico (4/13)

$$I = \frac{V_G}{R_G + R_1 + R_2} = \frac{V}{R_2}$$

descrizione analitica del fenomeno fisico in esame

$$R_2 \cdot V_G = \left(R_G + R_1 + R_2\right) \cdot V$$

$$R_2\left(V_G - V\right) = \left(R_G + R_1\right)V$$

$$R_2 = \frac{V}{\left(V_G - V\right)}\left(R_G + R_1\right) = f\left(V_G, V, R_G, R_1\right)$$

relazione funzionale

Esercizio: circuito elettrico (5/13)

$$u^2(R_2) = \left[\frac{\partial f}{\partial V_G}\right]^2 u^2(V_G) + \left[\frac{\partial f}{\partial V}\right]^2 u^2(V) +$$

$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial R_G}\right]^2 u^2(R_G) + \left[\frac{\partial f}{\partial R_1}\right]^2 u^2(R_1)$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ coeff. di sensibilità dice come *f*, ossia R_2 , varia al variare di un parametri di dipendenza

Esercizio: circuito elettrico (6/13)

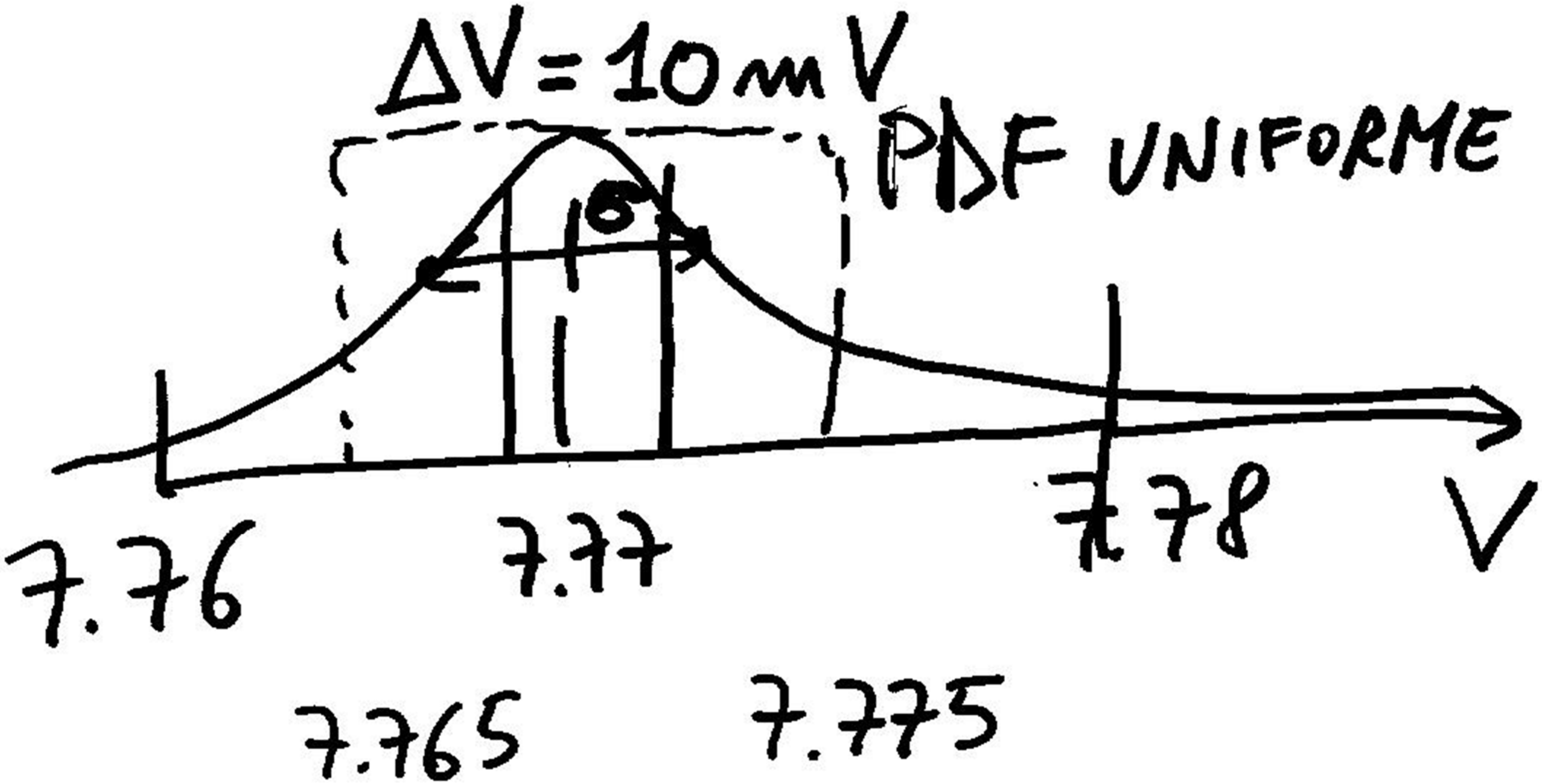
1) $u(V_G) = \quad U(V_G)/k = 5\times10^{-3}\ \text{V}$

$$u_{\text{r}}(V_G) = \frac{u(V_G)}{V_G} = \frac{5\times10^{-3}\ \text{V}}{12\ \text{V}} = 4.2\times10^{-4}$$

$$u(V) = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}} = \frac{0.01}{\sqrt{12}} = 2.9\times10^{-3}\ \text{V}$$

$$u_{\text{r}}(V) = \frac{u(V)}{V} = \frac{2.9\times10^{-3}\ \text{V}}{7.77\ \text{V}} = 3.7\times10^{-4}$$

Esercizio: circuito elettrico (7/13)



Esercizio: circuito elettrico (8/13)

$$u(R_1) = \quad 5\,\Omega$$

$$u_{\mathrm{r}}(R_1) = \quad \frac{u(R_1)}{R_1} = \frac{5\,\Omega}{1000\,\Omega} = 5 \times 10^{-3}$$

$$u(R_G) = u(\overline{R}_G) = \quad \frac{s(R_{G,k})}{\sqrt{n}} = \frac{12.65\,\Omega}{\sqrt{10}} = 4\,\Omega$$

$$u_{\mathrm{r}}(R_G) = \quad \frac{u(R_G)}{R_G} = \frac{4\,\Omega}{50\,\Omega} = 8 \times 10^{-2}$$

Esercizio: circuito elettrico (9/13)

2)

$$R_2 = \overline{R}_2 = \frac{\overline{V}}{\left(\overline{V}_G - \overline{V}\right)}\left(\overline{R}_G + \overline{R}_1\right) = \frac{7.77\ \text{V}}{4.23\ \text{V}}\, 1050\ \Omega = 1928.7\ \Omega$$

$$u^2(R_2) = \left[-\frac{V(R_G + R_1)}{(V_G - V)^2}\right]^2 u^2(V_G) +$$

$$+\left[\frac{R_G + R_1}{V_G - V} + \frac{V(R_G + R_1)}{(V_G - V)^2}\right]^2 u^2(V) +$$

$$+\left[\frac{V}{V_G - V}\right]^2 \left\{u^2(R_G) + u^2(R_1)\right\} =$$

Esercizio: circuito elettrico (10/13)

$$= 2.08\times10^{5}\ \frac{\Omega^2}{\mathrm{V}^2}\times 2.50\times10^{-5}\ \mathrm{V}^2 +$$

$$+ 4.96\times10^{5}\ \frac{\Omega^2}{\mathrm{V}^2}\times 8.41\times10^{-6}\ \mathrm{V}^2 +$$

$$+ 3.37\times 41\,\Omega^2 =$$

$$= \left(5.2 + 4.17 + 138.17\right)\Omega^2 = 147.54\ \Omega^2$$

$$u\left(R_2\right) = \sqrt{u^2\left(R_2\right)} = 12.15\ \Omega \cong 12\ \Omega$$

$$u_{\mathrm{r}}\left(R_2\right) = \frac{u\left(R_2\right)}{R_2} = 6.3\times10^{-3} \qquad \left(\approx \frac{12\ \Omega}{2\ \mathrm{k}\Omega} = 6\times10^{-3}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{R_2 = 1928\ \Omega \pm 12\ \Omega = 1928(12)\ \Omega}}$$

Esercizio: circuito elettrico (11/13)

3) Le incertezze associate a R_G e R_1 danno il maggior contributo all'incertezza di R_2 (circa in parti uguali)

   Invece l'incertezza $u(V)$ sulla tensione letta dal voltmetro e così pure l'incertezza $u(V_G)$ sulla tensione del generatore contribuiscono in modo quasi trascurabile (circa 1/35 e circa 1/30, rispettivamente, dell'incertezza totale)

Esercizio: circuito elettrico (12/13)

relazione funzionale

$$R_2 = \frac{V}{\left(V_G - V\right)}\left(R_G + R_1\right) = f\left(V_G, V, R_G, R_1\right)$$

per sostituzione, definiamo:

$$R_\Sigma = \left(R_G + R_1\right) = 1050\ \Omega$$

$$V_\Delta = \left(V_G - V\right) = 4.23\ \mathrm{V}$$

ottenendo la “nuova equazione della misura”:

$$R_2 = \frac{V}{V_\Delta} R_\Sigma = f\left(V, V_\Delta, R_\Sigma\right)$$

espressa come produttoria semplice (esponenti unitari) di 3 soli ingressi

Esercizio: circuito elettrico (13/13)

calcoliamo:

$$R_2 = \frac{V}{V_\Delta} R_\Sigma$$

$$u_\mathrm{r}\left(V\right) = \frac{u(V)}{V} = \frac{2.9\times10^{-3}\ \mathrm{V}}{7.77\ \mathrm{V}} = 3.7\times10^{-4}$$

$$u\left(V_\Delta\right) = \sqrt{u^2\left(V_G\right) + u^2\left(V\right)} = \sqrt{25+9}\ \mathrm{mV} = 5.8\ \mathrm{mV}$$

$$u_\mathrm{r}\left(V_\Delta\right) = u_\mathrm{r}\left(V_\Delta\right)/V_\Delta = 5.8\times10^{-3}/4.23 = 1.4\times10^{-3}$$

$$u\left(R_\Sigma\right) = \sqrt{u^2\left(R_G\right) + u^2\left(R_1\right)} = \sqrt{16+25} = 6.4\ \Omega$$

$$u_\mathrm{r}\left(R_\Sigma\right) = u_\mathrm{r}\left(R_\Sigma\right)/R_\Sigma = 6.4/1050 = 6.1\times10^{-3}$$

$$u_\mathrm{r}\left(R_2\right) = \sqrt{u_\mathrm{r}^2\left(V\right) + u_\mathrm{r}^2\left(V_\Delta\right) + u_\mathrm{r}^2\left(R_\Sigma\right)} = 6.3\times10^{-3} \cong u_\mathrm{r}\left(R_\Sigma\right)$$

$$u\left(R_2\right) = u_\mathrm{r}\left(R_2\right)\cdot R_2 = 6.3\times10^{-3}\cdot 1928.7\ \Omega = 12\ \Omega$$

$$\boxed{\boldsymbol{R_2 = 1928\ \Omega \pm 12\ \Omega = 1928(12)\ \Omega}}$$

Pb. ESE circuito elettrico (1/6)

MA nella nuova equazione per sostituzione:

$$R_2 = \frac{V}{V_\Delta} R_\Sigma = f\left(V, V_\Delta, R_\Sigma\right)$$

di fatto le variabili/ingressi V e $V_\Delta = V_G - V$ dipendendo entrambe da V e sono correlate!

Nel caso specifico calcolato in precedenza, con i valori delle incertezze sulle tensioni sostanzialmente trascurabili rispetto alle incertezze sulle resistenze, l'incertezza finale era praticamente solo funzione delle incertezze sulle resistenze e non di quelle sulle tensioni. Allora, avere trascurato la correlazione tra V e V_Δ , che è un errore, non aveva portato a conseguenze sul risultato. Tuttavia …

Pb. ESE circuito elettrico (2/6)

… nel medesimo esercizio proviamo a incrementare i valori delle incertezze sulle tensioni (ad es. prendiamo $u'(V_G)=20\times u(V_G)=100$ mV e $u'(V)=80\times u(V)=0.23$ V) e ripetiamo i calcoli. Naturalmente $R'_2 = R_2 = 1928\ \Omega$.
Con il metodo generale, che rimane corretto, otteniamo una incertezza $u'_{\mathrm{GEN}}(R_2)$ diversa da quella che otteniamo con il metodo per sostituzione $u'_{\mathrm{SOST}}(R_2)$ e che evidentemente è errata dato che non è stato tenuto conto della correlazione tra i due ingressi V e V_Δ:

$$\boxed{u'_{\mathrm{GEN}}(R_2) = 170\ \Omega \neq u'_{\mathrm{SOST}}(R_2) = 120\ \Omega}$$

L'incertezza di R_2 ottenuta dalla formula per sostituzione ma avendo trascurato le correlazioni viene sottostimata ed è scorretta in linea di principio quanto errata in termini di risultato.

Pb. ESE circuito elettrico (3/6)

Nei due casi/metodi, GENerale e per SOSTituzione, calcoliamo:

$$u_{\mathrm{GEN}}^2(R_2)=\left[\frac{\partial R_2}{\partial V_G}\right]^2 u^2(V_G)+\left[\frac{\partial R_2}{\partial V}\right]^2 u^2(V)+$$

$$+\left[\frac{\partial R_2}{\partial R_G}\right]^2 u^2(R_G)+\left[\frac{\partial R_2}{\partial R_1}\right]^2 u^2(R_1)$$

$$u_{\mathrm{SOST}}^2(R_2)=\left[\frac{\partial R_2}{\partial V}\right]^2 u^2(V)+\left[\frac{\partial R_2}{\partial V_\Delta}\right]^2 u^2(V_\Delta)+\left[\frac{\partial R_2}{\partial R_\Sigma}\right]^2 u^2(R_\Sigma)+$$

$$+2r(V,V_\Delta)\left[\frac{\partial R_2}{\partial V}\right]\left[\frac{\partial R_2}{\partial V_\Delta}\right]u(V)u(V_\Delta)$$

Pb. ESE circuito elettrico (4/6)

Risistemando i termini nella seconda espressione, otteniamo:

$$u^2_{\mathrm{SOST}}(R_2) = R_2^2\left[u_{\mathrm{r}}^2(V) + u_{\mathrm{r}}^2(V_\Delta) + u_{\mathrm{r}}^2(R_\Sigma)\right] \; +$$

$$+\,2r(V, V_\Delta)\left[\frac{\partial R_2}{\partial V}\right]\left[\frac{\partial R_2}{\partial V_\Delta}\right]u(V)u(V_\Delta)$$

e riportandosi alle incertezze relative:

$$u^2_{\mathrm{r,SOST}}(R_2) = \left[\,u_{\mathrm{r}}^2(V) + u_{\mathrm{r}}^2(V_\Delta) + u_{\mathrm{r}}^2(R_\Sigma)\,\right] +$$

adddendum
dovuto alla
correlazione
$+\,\Delta u^2_{\mathrm{r,corr}}$

$$\boxed{+\,r(V, V_\Delta)\frac{2}{R_2^2}\left[\frac{\partial R_2}{\partial V}\right]\left[\frac{\partial R_2}{\partial V_\Delta}\right]u(V)u(V_\Delta)}$$

Pb. ESE circuito elettrico (5/6)

ed infine è possibilile ricavare:

$$r(V,V_\Delta)=\frac{u^2_{\mathrm{r,SOST}}(R_2)-\left[u^2_{\mathrm{r}}(V)+u^2_{\mathrm{r}}(V_\Delta)+u^2_{\mathrm{r}}(R_\Sigma)\right]}{\frac{2}{R_2^2}\left[\frac{\partial R_2}{\partial V}\right]\left[\frac{\partial R_2}{\partial V_\Delta}\right]u(V)u(V_\Delta)}$$

che sostituendo i valori numerici porta a:

$$r(V,V_\Delta)=\frac{\left(\frac{120}{1930}\right)^2-\left[\left(\frac{0.23}{7.77}\right)^2+\left(\frac{0.25}{4.23}\right)^2+\left(\frac{6.4}{1050.0}\right)^2\right]}{\frac{2}{(1930)^2}\left[\frac{1}{4.23}1050\right]\left[-\frac{7.77}{(4.23)^2}1050\right]0.23\cdot 0.25}=-0.23$$

Pb. ESE circuito elettrico (6/6)

Si osserva che essendo $r(V,V_\Delta)<0$ e $(\partial R_2/\partial V_\Delta)<0$, l'addendum alla somma delle incertezze relative, dovuto alla correlazione tra le variabili di ingresso (V e V_Δ), è di fatto un addendo positivo che, se trascurato, porta a sottostimare l'incertezza $u(R_2)$

L'esercizio svolto mostra chiaramente quanto sia insidioso, e complesso, dover operare tenendo in conto le correlazioni tra le variabili di ingresso in una equazione della misura. Ove sussistano dubbi circa le correlazioni degli ingressi, tuttavia è necessario ricordare che la relazione generale è:

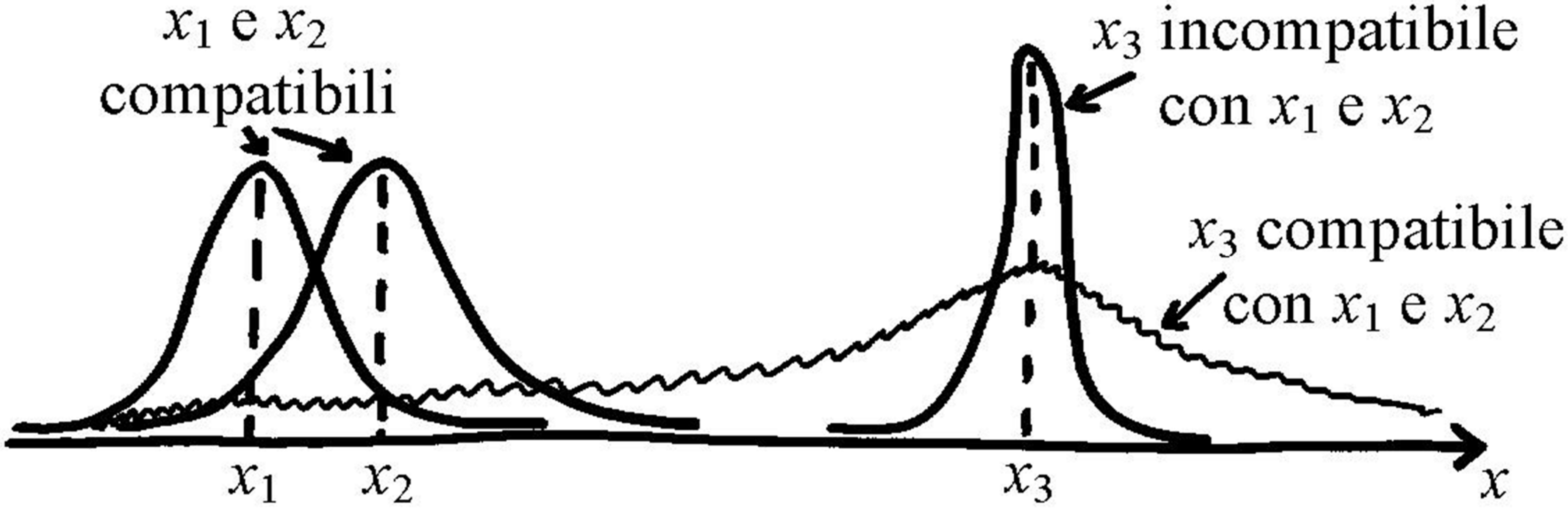
$$u_\mathrm{C}(y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i,x_j)}$$

oppure quando si utilizza la formula semplificata per ingressi indipendenti tale "ipotesi" deve essere chiaramente enunciata

Compatibilità tra due misure x_1 e x_2

distanza tra i due risultati $\leq$ "combinazione" delle incertezze associate alle due misure

$$\boxed{d = |x_1 - x_2| \leq k\sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) - 2r_{12}\,u(x_1)u(x_2)}}$$



Media pesata

Media pesata tra misure compatibili:
nel caso di N risultati di misura compatibili, indipendenti e normalmente distribuiti, la miglior stima della misura è

$$x = \bar{x}_{\mathrm{MP}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i \, x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{u^2(x_i)}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{u^2(x_i)}}$$

i **pesi** $w_i = \frac{1}{u^2(x_i)}$ sono i reciproci delle varianze stimate e dunque indicano il grado di confidenza che abbiamo sugli x_i: se $u(x_i)$ è basso la mis. è "credibile"

Incertezza della media pesata

$$u^2\left(\bar{x}_{\mathrm{MP}}\right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{u^2\left(x_i\right)}}$$

I rapporti tra media e incertezza (al quadrato) sono legati dalla relazione:

$$\frac{\bar{x}_{\mathrm{MP}}}{u^2\left(\bar{x}_{\mathrm{MP}}\right)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{u^2\left(x_i\right)} = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i$$

$z^* = z / u^2(z) = w_z z = \mu / \sigma^2$ è la misura "normalizzata" alla sua incertezza al quadrato (valor medio / varianza)

$$z^*_{\mathrm{MP}} = \sum_{i=1}^{N} z_i^*$$

Considerazioni sull’incertezza dell’incertezza e gradi di libertà

Ricordiamo che <u>ogni stima di incertezza è a sua volta incerta</u> e la bontà di questa stima è esprimibile attraverso il numero di gradi di libertà ($\nu_A = n - 1$ per l’INC di Cat. A)

Anche nel caso di INC di Cat. B si può stimare, non calcolare secondo una formula predeterminata, il numero ν_B di gradi di libertà della stima dell'INC (ricordando che è meglio sottostimare ν_B piuttosto che sovrastimarlo)

Stima dei gradi di libertà per l'incertezza di categoria B

Per l'INC di Cat. B si può avere nel caso migliore (*e.g.* INC di quantizzazione) $\nu_B = \infty$ e nel caso più conservativo (*worst case*) $\nu_B = 1$

Il numero di gradi di libertà ν_B deve essere stimato sulla base di quanto "si crede" alla stima di u_B e alla luce dell'analogo significato di $\nu_A = n-1$ nel caso di u_A per misure ripetute

Significato del numero di gradi di libertà

Consideriamo un campione di n dati. Di questo campione si può stimare la varianza e dev. st. del valor medio (e quindi l'incertezza della misura). Però, operando su un campione casuale, anche la stima della varianza è un numero casuale che presenta una potenziale dispersione. Il numero di gradi di libertà è un indicatore della **possibile variabilità della nostra stima dell'incertezza**:

si può dimostrare che $\sigma^2\left[s(\bar{x})\right] \cong \dfrac{\sigma^2(\bar{x})}{2\nu}$

qualità della stima di INC

e allora

$$INC(INC) = \sigma\left[u(x)\right] \cong \frac{u(x)}{\sqrt{2\nu}} \qquad u_{\mathrm{r}}(u(x)) = \frac{\sigma\left[u(x)\right]}{u(x)} \cong \frac{1}{\sqrt{2\nu}}$$

Incertezza dell'incertezza e cifre significative per l'INC

$$\mathrm{INC}[\mathrm{INC}(x)] = \sigma[u(x)] \cong \frac{u(x)}{\sqrt{2\nu}} \qquad u_{\mathrm{r}}(u(x)) = \frac{\sigma[u(x)]}{u(x)} \cong \frac{1}{\sqrt{2\nu}}$$

$$\nu^{-1} \cong 2\sigma^2[u(x)]/u^2(x) = 2u_{\mathrm{r}}^2[u(x)]$$

ν^{-1} è una indice/misura dell'**incertezza dell'incertezza**

ν alto $\Rightarrow$ INC(INC) bassa

ν basso $\Rightarrow$ INC(INC) alta

$u_{\mathrm{r}}[u(x)] \cong 0.7\,\nu^{-1/2} \approx \nu^{-1/2} \Rightarrow$ cifre per l'incertezza

$u_{\mathrm{r}}[u(x)] \approx 10^{-1}$ ($\nu \cong 100$) $\Rightarrow$ 1 cifra

$u_{\mathrm{r}}[u(x)] \approx 10^{-2}$ ($\nu \cong 10000$) $\Rightarrow$ 2 cifre

$u_{\mathrm{r}}[u(x)] \approx 10^{-3}$ ($\nu \cong 1000000$) $\Rightarrow$ 3 cifre (???)

Gradi di libertà per $u_C(y)$

E' possibile dimostrare che il numero di gradi di libertà ν_C della stima $u_C(y)$ e l'incertezza alla quarta potenza $[u_C(y)]^4$ sono legati dalla relazione

$$\frac{u_C^4(y)}{\nu_C} = \sum_{i=1}^{N} c_i^4 \frac{u^4(x_i)}{\nu_i} \qquad \frac{\sigma^4}{\nu} = \hat{z} = \sum_{i=1}^{N} c_i^4 \hat{z}_i$$

che esprime $[u_C(y)]^4/\ \nu_C$ come somma pesata, sempre con i “soliti” coefficienti di sensibilità, degli analoghi rapporti (u^4/ν) per le variabili d'ingresso

Formula di Welch-Satterthwaite per i gradi effettivi di libertà $\nu_C = \nu_{\mathrm{eff}}$ di $u_c(y)$

Per un'incertezza composta $u_C(y)$ si avrà un **numero di gradi effettivi di libertà**

$$\nu_C = \nu_{\mathrm{eff}} = \frac{\left[u_C^2(y)\right]^2}{\sum_{i=1}^{N} \frac{\left[c_i^2 u^2(x_i)\right]^2}{\nu_i}} = \frac{u_C^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \leq \sum_{i=1}^{N} \nu_i$$

e inoltre $\nu_C > \nu_{i,\mathbf{min}}$: garantendo una stima di INC composta almeno più affidabile della meno affidabile stima di INC tra gi ingressi

Esercizio su compatibilità e media pesata (1/5)

Due differenti misure della stessa potenza a radiofrequenza, emessa da un telefono cellulare, vengono effettuate con strumenti diversi e in maniera del tutto indipendente.

• La prima misura è analogica ("senza limiti di risoluzione") ed è ricavata da letture ripetute (n=5) del misurando, che hanno fornito i valori:

$P_{1,1}$=3.4 W $P_{1,2}$=3.2 W $P_{1,3}$=3 W $P_{1,4}$=2.8 W $P_{1,5}$=2.6 W

• La seconda misura è digitale, con un wattmetro ideale a 100 livelli e portata 20 W, e ha fornito una lettura P_2 = 3.2 W.

a) Calcolare i due valori di misura, P_1 e P_2, e le corrispondenti incertezze tipo (standard).

b) Valutare la compatibilità tre i due risultati di misura, in particolar modo per fattori di copertura k pari a 1, 2, e 3.

c) Ricavare la miglior stima per il valore della potenza P misurata e la sua incertezza tipo $u(P)$.

Esercizio su compatibilità e media pesata (2/5)

a) $P_1 = \overline{P_1} = \overline{P_{1,i}}$ = 3 W ricavata come media campionaria: $\overline{P_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{1,i}$

$$u(P_1) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(P_{1,i} - \overline{P_1}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5\times 4}\left[(0.4)^2 + (0.2)^2 + (0)^2 + (-0.2)^2 + (-0.4)^2\right]\mathrm{W}^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\times(0.16+0.04)}{20}\,\mathrm{W}^2} = \sqrt{\frac{2\times 0.20}{20}}\ \mathrm{W} = \sqrt{2\times 10^{-2}}\ \mathrm{W} = 0.1\sqrt{2}\ \mathrm{W} \cong 0.14\ \mathrm{W}$$

P_2 = 3.2 W da una misura digitale con risoluzione $\Delta P_2 = \frac{20\ \mathrm{W}}{100\ (\mathrm{livelli})}$ = 0.2 W (passo di quantizzazione)

$$u(P_2) = \frac{\Delta P_2}{\sqrt{12}} \cong 0.058\ \mathrm{W} \sim 0.06\ \mathrm{W} \text{ (incertezza di quantizzazione)}$$

Esercizio su compatibilità e media pesata (3/5)

b) Per verificare la compatibilità tra le due misure, si deve valutare la disuguaglianza

$$\left|P_1 - P_2\right| \le k\sqrt{u^2\left(P_1\right) + u^2\left(P_2\right)}$$

con k fattore di copertura (il termine di covarianza non compare essendo per ipotesi le due misure statisticamente indipendenti).

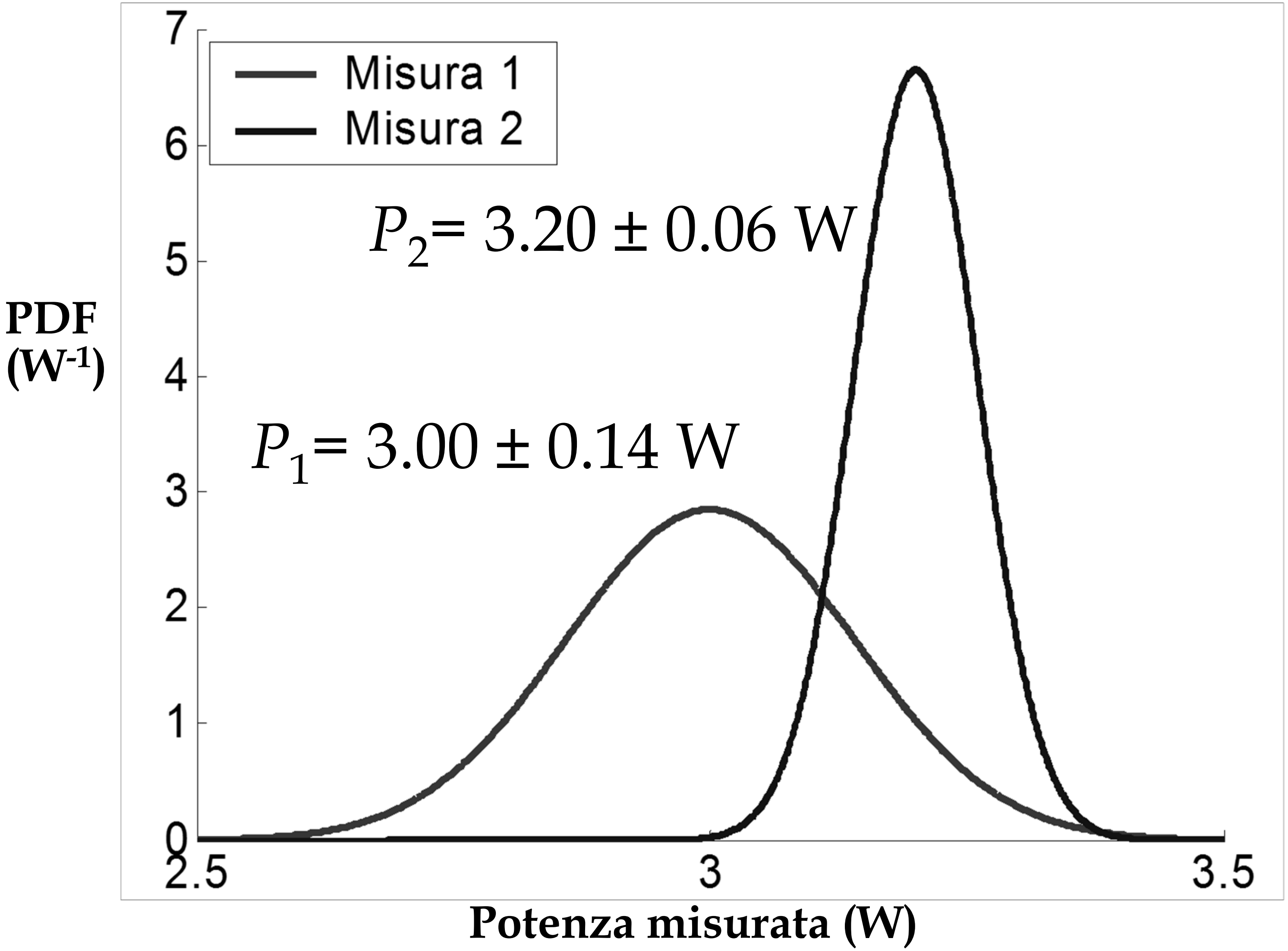
Sostituendo i valori numerici si ha

$$0.2\ \mathrm{W} \le k\ \sqrt{0.0232\ \mathrm{W}^2} \cong k \times 0.1523\ \mathrm{W} \quad \Rightarrow \quad k \ge (0.2/0.1523) = 1.313$$

Pertanto, le due misure sono compatibili con $k = 2$ e ovviamente anche con k = 3 ma non sono compatibili con $k = 1$.

Esercizio su compatibilità e media pesata (4/5)

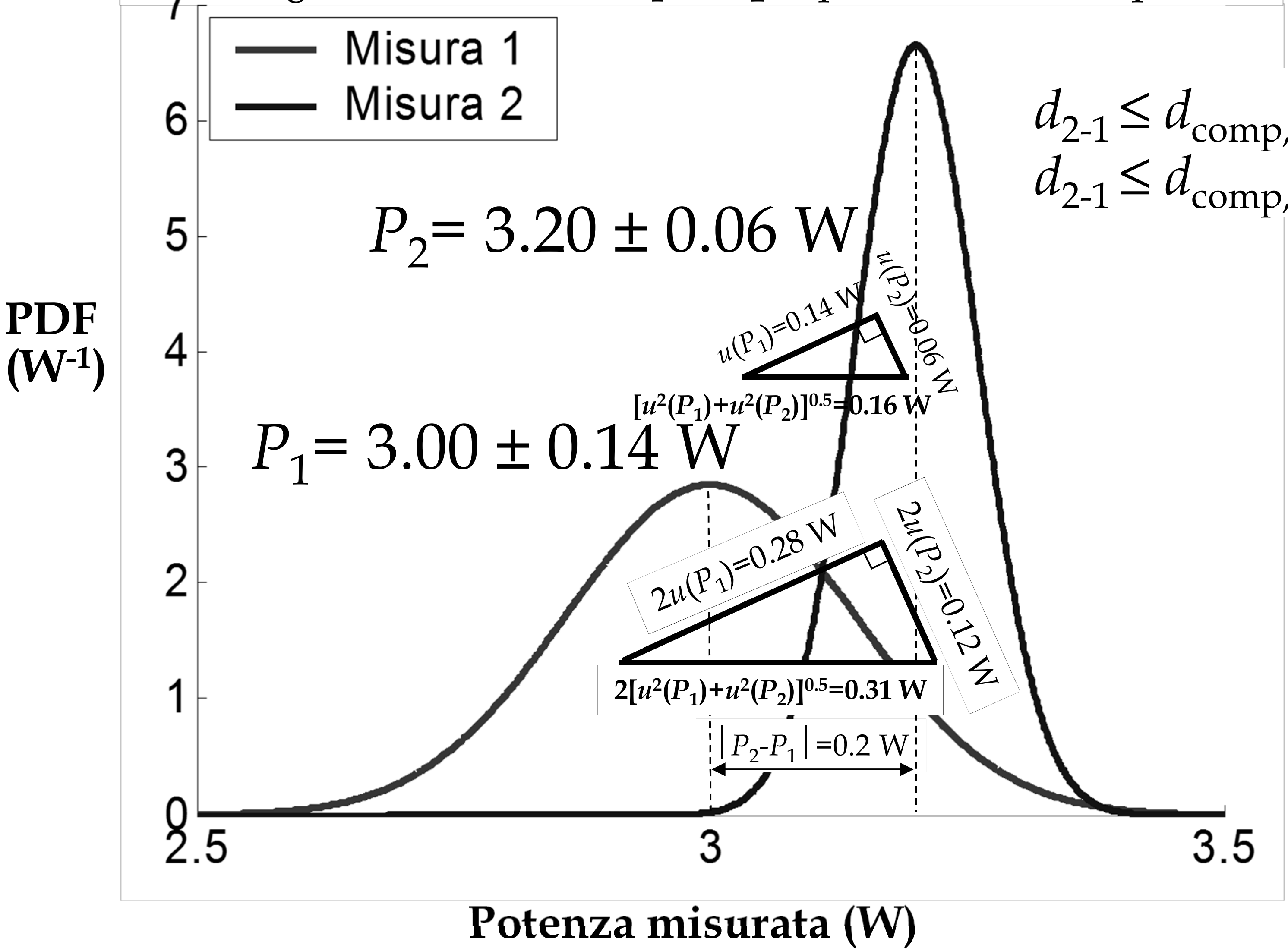
Interpretazione grafica della compatibilità tra le due misure



Esercizio su compatibilità e media pesata (4/5)

Interpretazione grafica della compatibilità tra le due misure

triangolo rett. con lati $\boldsymbol{ku_1}$ e $\boldsymbol{ku_2}$ e ipotenusa che "copre" $\boldsymbol{d}$



$d_{2\text{-}1} \le d_{\text{comp},k=1}$ ...NO!

$d_{2\text{-}1} \le d_{\text{comp},k=2}$ ...SI!

Commento su distanza e compatibilità

Disponendo di due misure $m_1 \pm u(m_1)$ e $m_2 \pm u(m_2)$,

dunque poste a distanza $d = m_1 - m_2$,

NON si può avere compatibilità (...se la somma delle INC non copre la dist. d/k)

per k=1 se $[\, u(m_1)+u(m_2)\,] < d$ $\longrightarrow$ **perché $d^2 > [\, u_1+u_2\,]^2 > u_1^2+u_2^2$**

per k=2 se $[\, u(m_1)+u(m_2)\,] < d/2$ **essendo $u_1^2+u_2^2+2\,u_1u_2 > u_1^2+u_2^2$**

per k=3 se $[\, u(m_1)+u(m_2)\,] < d/3$ **e dunque $d > [\, u_1^2+u_2^2\,]^{1/2}$ ($\Rightarrow$ incomp.)**

Se la somma di due incertezze è inferiore alla distanza tra le due misure (diviso *k*), allora non si può avere compatibilità (con un fattore di copertura *k*)

<u>Se la distanza tra le misure è "molto maggiore" della somma delle incertezze allora non si ha compatibilità</u>

Esercizio su compatibilità e media pesata (5/5)

c) Ritenendo accettabile la condizione di compatibilità con k = 2, possiamo calcolare la miglior stima della potenza P misurata, ricorrendo al criterio della media pesata tra misure compatibili:

$$P_{\mathrm{MP}} = \frac{\dfrac{P_1}{u^2(P_1)} + \dfrac{P_2}{u^2(P_2)}}{\dfrac{1}{u^2(P_1)} + \dfrac{1}{u^2(P_2)}} = \frac{153\ \mathrm{W}^{-1} + 888\ \mathrm{W}^{-1}}{51\ \mathrm{W}^{-2} + 278\ \mathrm{W}^{-2}} = \frac{1041\ \mathrm{W}^{-1}}{329\ \mathrm{W}^{-2}} \cong 3.169\ \mathrm{W}$$

Naturalmente P_{MP} è più vicino a P_2 che a P_1 essendo $u(P_2)<u(P_1)$

L' incertezza della media pesata è:

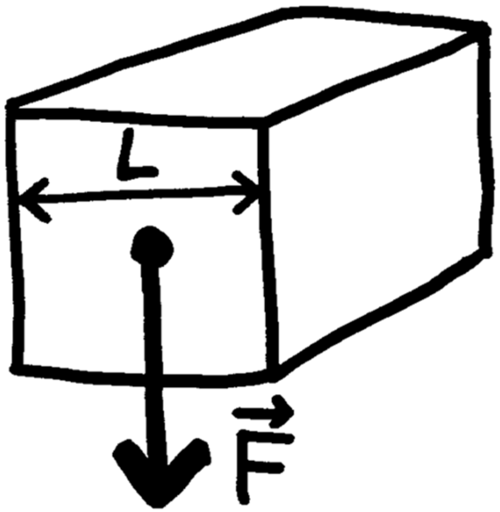
$$u(P_{\mathrm{MP}}) = \sqrt{\frac{1}{\dfrac{1}{u^2(P_1)} + \dfrac{1}{u^2(P_2)}}} = \sqrt{\frac{1}{329\ \mathrm{W}^{-2}}} \cong 0.055\ \mathrm{W}$$

Naturalmente $u(P_{\mathrm{MP}})$ è inferiore sia a $u(P_1)$=140mW che a $u(P_2)$=60mW

Per cui ***P* = 3.169(55) W** o anche ***P* = 3.17(6) W** è il **risultato** della misura

Esercizio su INC e media pesata (1/15)

ESERCIZIO media pesata e incertezza



Cubo di Al di lato ~1 m

Calcolare il suo PESO

$g = 9.806\,65(33)\ m/s^2$

L misurato mediante conteggio di frange a $\lambda = 500$ nm ottenendo un numer di conteggi N sempre compreso tra $N_1 = 2 \times 10^6$ e $N_2 = 2 \times 10^6 + 40$

Esercizio su INC e media pesata (2/15)

Per la densità ρ del materiale disponiamo di 3 possibili valori:

"C" secondo il costruttore:

$\rho_C = 2.71$ Kg/dm^3 con incertezza di 2×10^{-5}

"T" da diversi testi di meccanica e materiali si ricavano $n=9$ valori ρ_K con

$\rho_T = \overline{\rho_K} = 2.73$ Kg/dm^3 e dev. $s(\rho_K) = 9$ g/dm^3

"L" da una misura di laboratorio si ha

$\rho_L = 2.69$ Kg/dm^3 con $u(\rho_L) = 0.02$ Kg/dm^3

Esercizio su INC e media pesata (3/15)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$F = mg = (\rho V)g = \rho L^3 g$$

relazione funzionale

$$y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

Esercizio su INC e media pesata (4/15)

$$\bar{F} = \bar{\rho}\,\bar{L}^3\,\bar{g}$$

$$u(F) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i)}$$

o anche

$$u_R(F) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} n_i^2\, u_R^2(x_i)}$$

Esercizio su INC e media pesata (5/15)

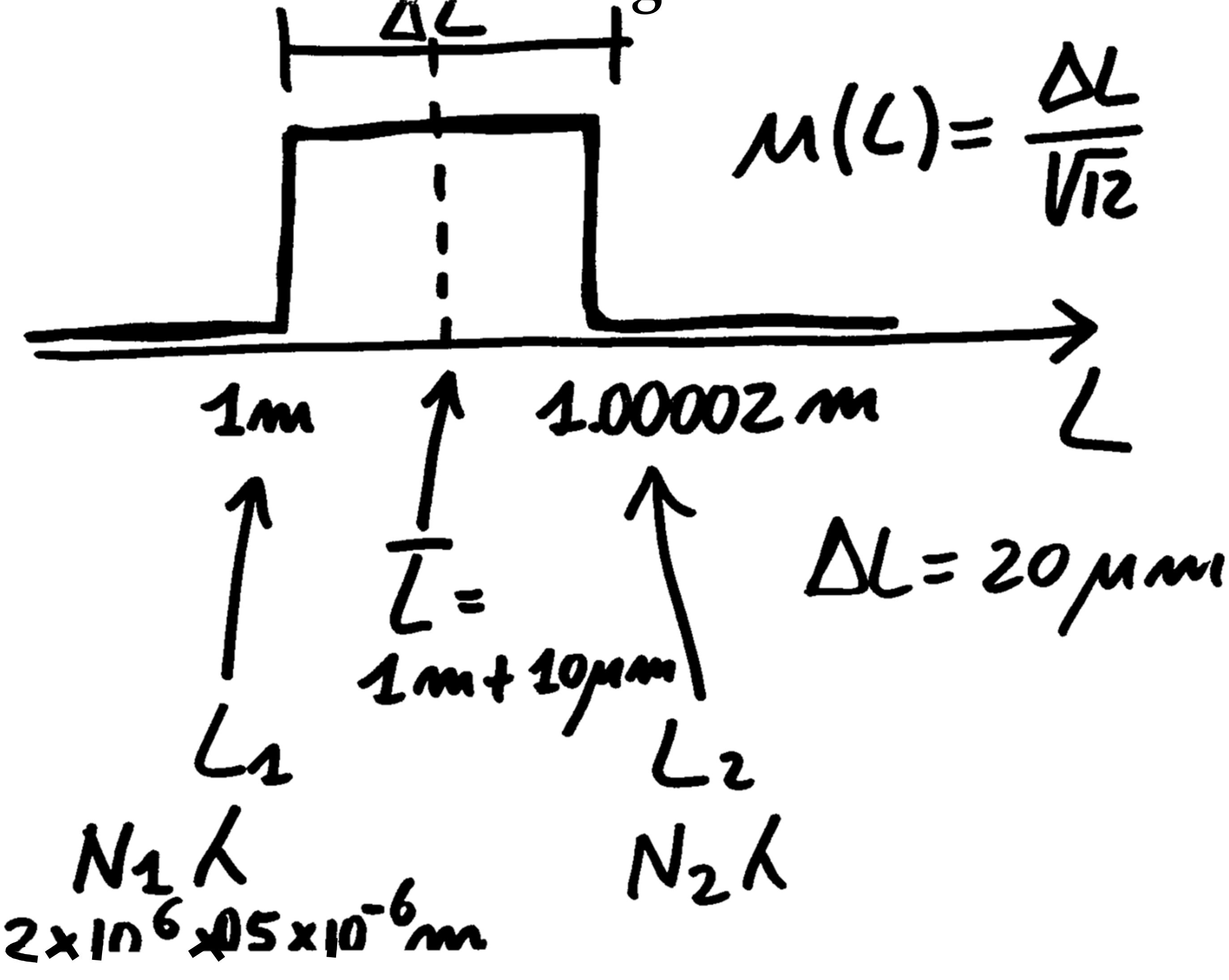
$$F = 2.71 \times 10^3 \; \frac{Kg}{\cancel{m^3}} \times (1.00001)^3 \, \cancel{m^3} \times$$

$$\times \; 9.80665 \; m/s^2$$

$$F = 26\,576.8 \; \underbrace{Kg \frac{m}{s^2}}_{N} \approx 26.6 \, KN$$

Esercizio su INC e media pesata (6/15)

Incertezza sulla lunghezza *L*...



Esercizio su INC e media pesata (7/15)

$$u(\bar{L}) = u(L) = \frac{20\,\mu m}{\sqrt{12}} \cong 5.8\,\mu m$$

$$u_r(L) = \frac{u(L)}{L} \cong 6 \times 10^{-6}$$

$$u(g) = 33 \times 10^{-5}\ m/s^2$$

$$u_r(g) = \frac{u(g)}{g} = \frac{33}{980\,665} \cong 3.4 \times 10^{-5}$$

Esercizio su INC e media pesata (8/15)

densità ρ

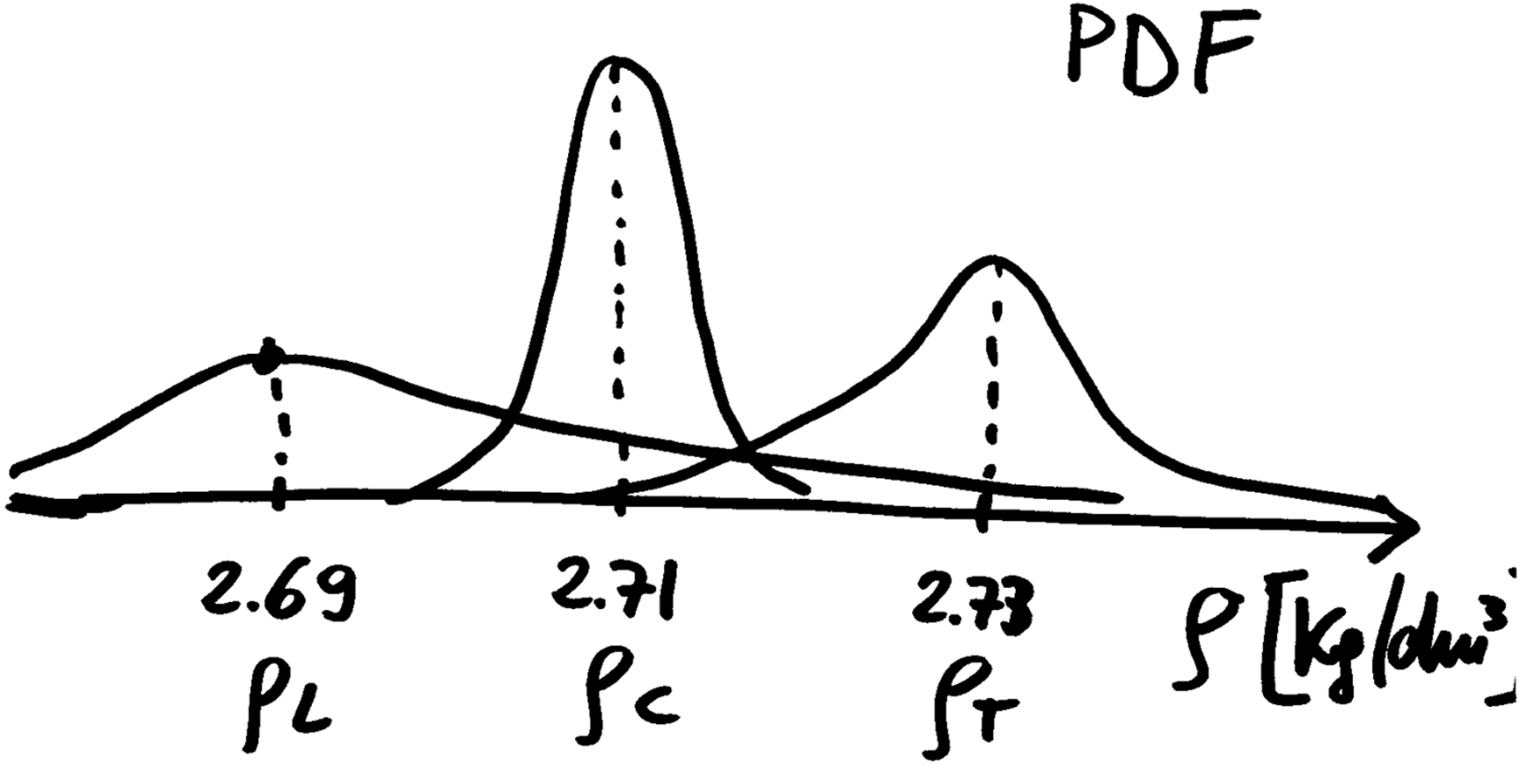
$\rho_C = 2.71\ Kg/dm^3 \quad u(\rho_C) \cong 5.4 \times 10^{-5}\ Kg/dm^3$

$\rho_T = 2.73\ Kg/dm^3 \quad u(\rho_T) = \frac{s(\rho_K)}{\sqrt{n}} =$

$= \frac{9 \times 10^{-3}\ Kg/dm^3}{3} = 3 \times 10^{-3}\ Kg/dm^3$

$\rho_L = 2.69\ Kg/dm^3 \quad u(\rho_L) = 2 \times 10^{-2}\ Kg/dm^3$

Esercizio su INC e media pesata (9/15)



COMPATIBILITÀ fra ρ_α e ρ_β

$$|\rho_\alpha - \rho_\beta| \leq K\sqrt{u^2(\rho_\alpha) + u^2(\rho_\beta)}$$

Esercizio su INC e media pesata (10/15)

con $K = 1$ risultano comp.
le misure ρ_L e ρ_C mentre
è <u>incompatibile</u> ρ_T

Per la stima di ρ e $u(\rho)$
ricorro al criterio della
MEDIA PESATA tra mis
comp.

Esercizio su INC e media pesata (11/15)

$$\rho = \frac{\dfrac{\rho_L}{u^2(\rho_L)} + \dfrac{\rho_C}{u^2(\rho_C)}}{\dfrac{1}{u^2(\rho_L)} + \dfrac{1}{u^2(\rho_C)}} \cong \rho_C = 2.71 \ \mathrm{Kg/dm^3}$$

$$u^2(\rho) = \frac{1}{\dfrac{1}{u^2(\rho_L)} + \dfrac{1}{u^2(\rho_C)}} = u^2(\rho_C)$$

$$u(\rho) \cong u(\rho_C) \cong 5.4 \times 10^{-5} \ \mathrm{Kg/dm^3}$$

$$u_r(\rho) = u(\rho)/\rho \simeq 2 \times 10^{-5}$$

Esercizio su INC e media pesata (12/15)

Si provi a ripetere il calcolo per tutte e 3 le misure di ρ *compatibili tra loro (ad es. con* k*=2).*

Rispetto al caso di prima (per k*=1 e due sole misure compatibili), il valore di densità ottenuto dalla media pesata* (ρ_{MP}) *non si sposta di molto.*
Neppure l'incertezza della media pesata $u(\rho_{\mathrm{MP}})$ *diminuisce di molto.*
ρ_{MP3}=2.71kg/dm^3$\cong\rho_{\mathrm{MP2}}$ e $u(\rho_{\mathrm{MP3}})$=5.4×10^{-5}kg/dm^3$\cong u(\rho_{\mathrm{MP2}})$

Esercizio su INC e media pesata (13/15)

$$u^2(F) = \left[\frac{\partial F}{\partial \rho}\right]^2 u^2(\rho) + \left[\frac{\partial F}{\partial L}\right]^2 u^2(L) +$$

$$+ \left[\frac{\partial F}{\partial g}\right]^2 u^2(g) =$$

$$= \left[L^3 g\right]^2 u^2(\rho) + \left[3\rho L^2 g\right]^2 u^2(L) +$$

$$\left[\rho L^3\right]^2 u^2(g)$$

Esercizio su INC e media pesata (14/15)

$$\frac{u^2(F)}{F^2} = \frac{u^2(\rho)}{\rho^2} + \frac{9u^2(L)}{L^2} + \frac{u^2(g)}{g^2}$$

$$u_r(F) = \sqrt{u_r^2(\rho) + 9u_r^2(L) + u_r^2(g)} \cong$$

$$\cong \sqrt{(2\times10^{-5})^2 + 9(6\times10^{-6})^2 + (3.4\times10^{-5})^2}$$

Esercizio su INC e media pesata (15/15)

$$= \sqrt{4 + 3.24 + 11.56} \times 10^{-5} =$$

$$= \sqrt{18.8} \times 10^{-5} \cong 4.4 \times 10^{-5}$$

$$u(F) = u_r(F) \times F \cong 1.2\,N$$

[redacted]