LEZIONE (ESPRESSIONE INCERTEZZA DI MISURA

- ▷ Introduzione
- ▷ Errori, scarti tipo, polarizzazioni
- ▷ Modello per il processo di misura
- ▷ Valor medio e varianza campionaria
- ▷ Valutazione incertezza di categoria A
- ▷ Distribuzione di probabilità per una variabile casuale: media e varianza
- ▷ Distribuzione normale, uniforme, triangolare
- ▷ Valutazione incertezza di categoria B
- ▷ Calcolo dell' incertezza composta (combinata) in una misura diretta e in una misura indiretta
- ▷ Incertezza estesa (espansa) e incertezza relativa
- ▷ Considerazioni pratiche ed ESEMPI
- ▷ Misure compatibili e media pesata
- ▷ Esempi di calcolo

INTRODUZIONE

Misura e risultato di misura

Teoria degli errori: errori accidentali e errori sistemati

Fine anni '70 CIPM ⇝ BIPM ⇝ Attività normati
sull'espressione dell'incertezza di misura

1993 **ISO** Guida all'espressione dell'incertezza nella misurazi

"errore" → polarizzazione (nota o conoscibile ⇒ correggibile)

2 CATEGORIE di raggruppamento per le incertezze di misura

A - INC stimate con metodi statistici

B - INC stimate in altro modo ($\neq$ statistica)

Incertezza o scarto tipo, u dall'inglese "uncertainty", è una stima della deviazione standard σ, radice della varianza σ^2, prevista per il valore di misura.

Incertezza ~~combinata~~ composta $u_c^2 = u_A^2 + u_B^2$

Incertezza ~~espansa~~ estesa $U = K u_c$

fattore di copertura
di solito compreso fra 2 e 3

Incertezza relativa $u_r(y) = u(y)/y$ [adimensionale]

Modello per il processo di misura

RELAZIONE FUNZIONALE (equazione della misura):

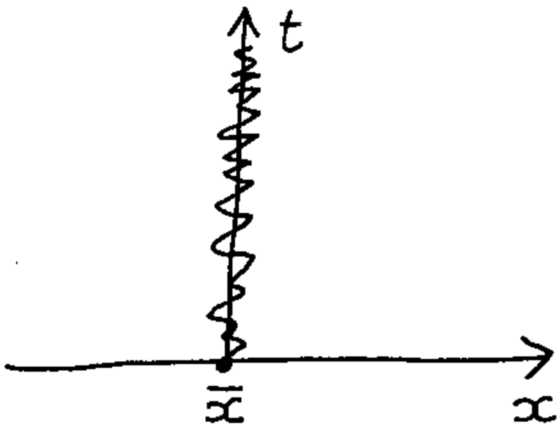
$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

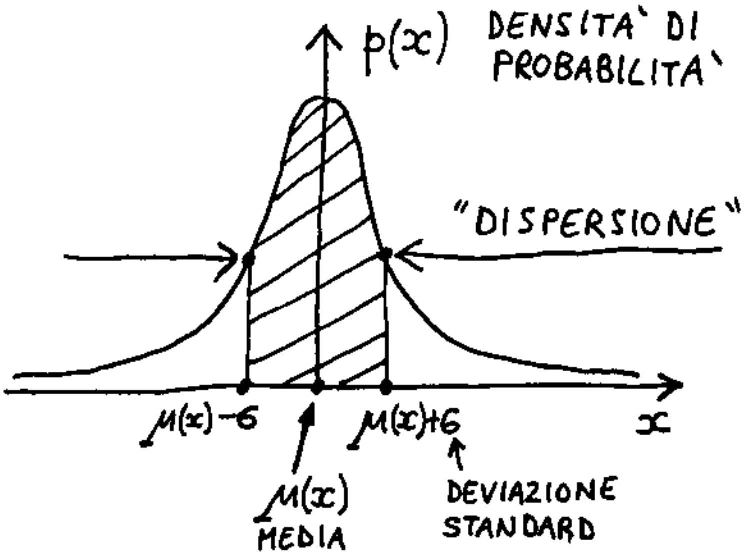
$$y = E[y_K] = f(x_1, x_2, \dots, x_N) - \delta f$$

valore d'aspettazione, "expectation value"

INCERTEZZA DI MISURA

- Misure ripetute dello stesso parametro fisico non forniscono lo stesso valore
- DISPERSIONE DI VALORI $\Rightarrow$ INCERTEZZA





$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x)\,dx$$ PROBABILITA'

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$$ NORMALIZZAZIONE DELLA PDF

MEDIA $$\mu(x) = E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,dx$$

VARIANZA $$\sigma^2(x) = E\left\{[x-\mu(x)]^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x-\mu(x)]^2 p(x)\,dx$$

DEVIAZIONE STANDARD $$\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)}$$

- Distribuzione NORMALE (GAUSSIANA)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(x)} \exp\left\{-\frac{[x-\mu(x)]^2}{2[\sigma(x)]^2}\right\}$$

INTERVALLI DI CONFIDENZA
$$\begin{cases} 1\sigma & 68.27\% \sim 68.3\% \\ 2\sigma & 95.45\% \sim 95.5\% \\ 3\sigma & 99.73\% \sim 99.7\% \end{cases}$$

e.g. $$P\left[\mu(x)-\sigma(x) \leq x \leq \mu(x)+\sigma(x)\right] \cong 68.27\%$$

▷ Incertezza di Categoria A

Variabile x nota attraverso n determinazioni x_K

- Stima del valor medio della (intera) popolazione $\mu(x)$ attraverso lo stimatore "media dei campioni"

$$\mu(x) \triangleq E[x] \overset{S}{\cong} \underset{\text{media campionaria}}{\bar{x}_K} \triangleq \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} x_K \qquad \text{D1}$$

STIMA: $\bar{x} \triangleq \bar{x}_K \overset{S}{\cong} \mu(x)$ D1

- Stima della varianza della (intera) popolazione $\sigma^2(x)$ attraverso lo stimatore "varianza campionaria"

$$\sigma^2(x) \triangleq E\left[\left(x - \overset{\mu(x)}{\cancel{\bar{x}}}\right)^2\right] \overset{S}{\cong} \underset{\text{varianza campionaria}}{s^2(x_K)} \triangleq \frac{1}{n-1}\sum_{K=1}^{n}(x_K - \bar{x})^2 \qquad \text{D2}$$

STIMA: $s^2(x) \triangleq s^2(x_K) \overset{S}{\cong} \sigma^2(x)$ D2

(*) JUMP ▶ con D3

- Per misure ripetute di una grandezza X il valore di misura x coincide con il valor medio delle determinazioni x_K ottenute

$$x = \bar{x} = \bar{x}_K$$

Per determinare la dispersione (incertezza) sul risultato di misura, dobbiamo valutare la dispersione di $\bar{x}$

$$u_A(x) = s(\bar{x}) \overset{\text{D4}}{=} \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{K=1}^{n}(x_K - \bar{x})^2}$$

standard uncertainty o incertezza tipo (di categoria A) indica la dispersione del risultato di misura ed è uno stimatore della deviazione standard (radice quadrata della varianza) della variabile $\bar{x}$

$\boxed{D1}$ Dimostrazione

$$E[\bar{x}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum x_k\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum E[x_k] = \frac{1}{n}\sum E[x] =$$

$$= \frac{1}{n}\, n\, E[x] = \mu(x)$$

Dimostrazione $\boxed{D2}$

$$E\left[s^2(x)\right] = E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum x_k^2 - n\bar{x}^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{E\left[\sum x_k^2\right] - E\left[\frac{1}{n}\left(\sum x_k\right)^2\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum E\left[x_k^2\right] - \frac{1}{n}E\left[\sum x_k \sum x_k\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum E\left[x_k^2\right] - \frac{1}{n}\sum E\left[x_k^2\right] - \frac{1}{n}E\left[\sum_{k\neq j} x_k x_j\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\frac{n-1}{n}\sum E\left[x_k^2\right] - \frac{1}{n}\sum_{k\neq j} E\left[x_k\right]E\left[x_j\right]\right\} =$$

Notiamo che $E[x_k] = E[x_j] = E[x] = \mu(x)$ e

$$E\left[x_k^2\right] = E\left[x^2\right] = \sigma^2(x) + \mu^2(x)$$

Dim. $\sigma^2(x) = E\left[(x-\mu(x))^2\right] = E[x^2] - 2E[x\mu(x)] + E[\mu^2($

$$= E\left[x^2\right] - \mu^2(x)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\frac{n-1}{n}\left[n\left(\sigma^2(x) + \mu^2(x)\right)\right] - \frac{1}{n}n(n-1)\mu^2(x)\right.$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\frac{n-1}{n}\sum E\left[x^2\right] - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(E[x]\underbrace{\sum_{j=k+1}^{n}E[x]}_{(n-1)\mu(x)}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{(n-1)\sigma^2(x) + (n-1)\mu^2(x) - (n-1)\mu^2(x)\right\} =$$

$$= \sigma^2(x)$$

Dimostrazione $\boxed{D3}$

$$S^2(x) \triangleq \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)-n\bar{x}^2\right]$$

Dimostrazione

$$\sum(x_k-\bar{x})^2 = \sum\left(x_k^2-2x_k\bar{x}+\bar{x}^2\right) =$$

$$= \left(\sum x_k^2\right)-2\bar{x}\sum x_k + \sum\bar{x}^2 =$$

$$= \left(\sum x_k^2\right)-2\bar{x}\,n\bar{x} + n\bar{x}^2 =$$

$$= \left(\sum x_k^2\right) - n\bar{x}^2$$

La varianza campionaria di n campioni si può calcolare come la somma dei campioni elevati al quadrato meno n volte la media dei campioni, sempre elevata al quadrato, il tutto diviso per (n-1).

$$s^2(\bar{x}) = \frac{s^2(x)}{n}$$

Dimostrazione $\boxed{D4}$

$$s^2(\bar{x}) = s^2\left[\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} x_K\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 s^2\left[\sum_{K=1}^{n} x_K\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{K=1}^{n} s^2(x_K) = \frac{1}{n^2}\, n\, s^2(x) = \frac{s^2(x)}{n}$$

e quindi

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

---

s^2 è un "operatore quadratico", per cui

$$s^2(a \cdot z) = a^2 \cdot s^2(z)$$

Dim. $\boxed{D5}$

$$s^2(az) = \frac{1}{n-1}\sum_{K=1}^{n}\left[(az)_K - (\overline{az})\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{K=1}^{n}\left[a \cdot z_K - a \cdot \bar{z}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{K=1}^{n} a^2\left[z_K - \bar{z}\right]^2 =$$

$$= a^2 \cdot \frac{1}{n-1}\sum_{K=1}^{n}(z_K - \bar{z})^2 =$$

$$= a^2 \cdot s^2(z)$$

ESERCIZIO :
ESEMPIO : Calcolo dell'incertezza di categoria A

Si dispone di $n = 10$ determinazioni di tensione V_K

Calcolare V e $u_A(V)$

K [1]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_K [V]	7	9	8	6	7	5	7	8	6	7

$$V = \bar{V} = \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{n} V_K = \frac{1}{10} \cdot 70\,V = 7\,V$$

$$u_A(V) = \frac{S(\bar{V}) =}{} \frac{S(V)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{K=1}^{n} (V_K - \bar{V})^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \left[\left(\sum_{K=1}^{n} V_K^2 \right) - n\bar{V}\right.}$$

- se utilizziamo la 2ª espressione per $u_A(V)$ ci conviene calcolare prima gli scarti (deviazioni dal valor medio) i $(V_K -$

$(V_K - \bar{V})$ [V] 0, +2, +1, −1, 0, −2, 0, +1, −1, 0

per poi ricavare

$$u_A(V) = \sqrt{\frac{1}{10 \cdot 9} (0+4+1+1+0+4+0+1+1+0) V^2} = \sqrt{\frac{12}{90} V^2} = \sqrt{\frac{2}{15} V^2} \cong 0.$$

- utilizzando la 3ª espressione per $u_A(V)$ dobbiamo calcolare prima $\sum_{K=1}^{n} V_K^2 = 502\,V^2$ oltre a conoscere $\bar{V} = 7\,V$. Quindi si ricava

$$u_A(V) = \sqrt{\frac{1}{10 \cdot 9} \left[502\,V^2 - 10 \cdot 49\,V^2 \right]} = \sqrt{\frac{12}{90} V^2} \cong 0.36\,V$$

- utilizzando la 1ª espressione per $u_A(V)$ dobbiamo prima calcolare/conoscere la radice della varianza campionaria, $S(V) = 1.1547\,V$ e poi dividerla per $\sqrt{n}$

$$u_A(V) = \frac{1.1547\,V}{\sqrt{10}} \cong 0.36\,V$$

▷ Incertezza di categoria B

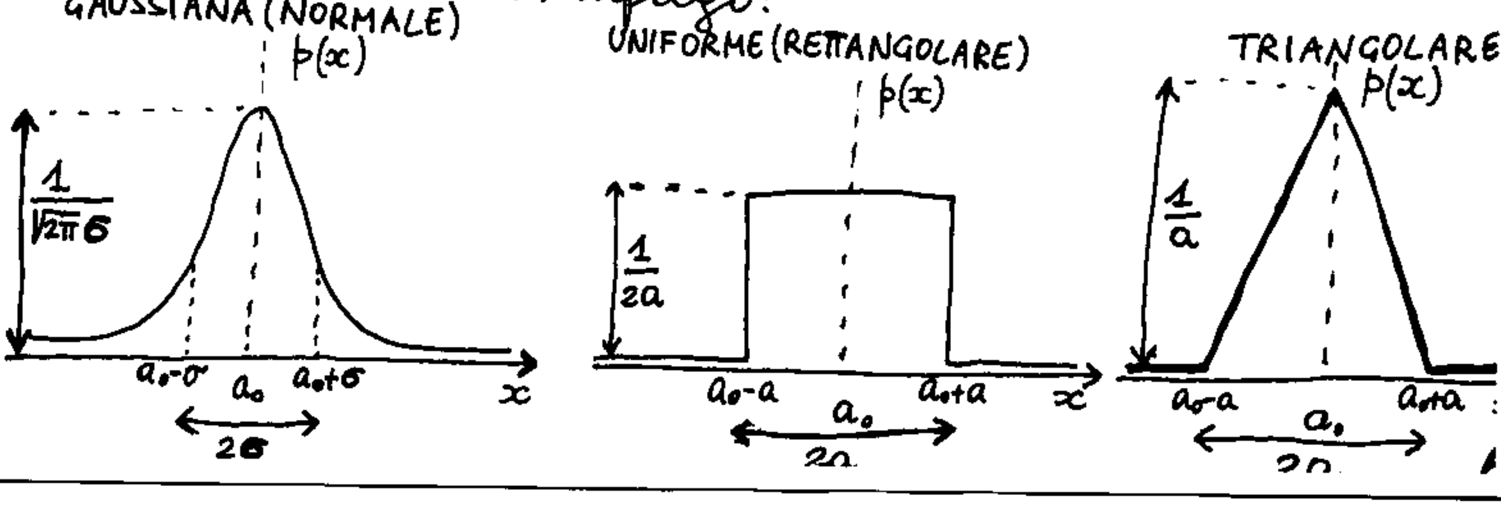
- Si basa sulla definizione "a priori" di un opportuno intervallo di valori entro il quale si suppone debbano cadere i valori del misurando (con una data probabilità).
- A questo intervallo si associa quindi una densità di probabilità (PDF) e di questa si calcolano media, varianza, e deviazione standard.
- L'intervallo così fissato è tipicamente centrato attorno al valor medio $a_0 = \frac{(a_0+a)+(a_0-a)}{2}$ e ha una piena larghezza $\Delta = (a_0+a)-(a_0-a) = 2a$.
- Tanto la larghezza dell'intervallo quanto la PDF ad esso associata si scelgono sulla base di:
  - precedenti conoscenze o dati di misura
  - esperienza sul comportamento del misurando
  - specifiche dei costruttori di materiali e strumenti coinvolti nella misurazione
  - dati forniti da calibrazioni o pubblicazioni precedenti
  - incertezza sui parametri di riferimento presa da manuali

PROCEDURE DI STIMA DI u_B

- Quando dispongo di una PDF, ancorchè ipotizzata, posso calcolare $\mu(x)$ e $\sigma(x)$ che mi danno il valore di misura e la sua incertezza:

$$x_{MIS} = \mu(x) \quad \text{e} \quad u_B(x) = \sigma(x)$$

PDF di comune impiego:



$\boxed{\text{PDF normale}}$

già dispongo di $\mu(x)$ e $\sigma(x)$; ricordo che

1σ level $P\left[\mu(x)-\sigma(x) \leq x \leq \mu(x)+\sigma(x)\right] = 68.3\,\%$

2σ level $P\left[x \text{ in } \mu(x) \pm 2\sigma(x)\right] = 95.5\,\%$

3σ level $P\left[x \text{ in } \mu(x) \pm 3\sigma(x)\right] = 99.7\%$

$\boxed{\text{PDF uniforme}}$

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x < a_0 - a \\ \frac{1}{2a} & a_0 - a \leq x \leq a_0 + a \\ 0 & x > a_0 + a \end{cases}$$

É immediato verificare che $\mu(x) = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx = a$

$$\sigma^2(x) = E\left[\left(x-\mu(x)\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu(x))^2 p(x)\, dx = \int_{a_0-a}^{a_0+a} (x-a_0)^2 \frac{1}{2a}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{(x-a_0)^3}{3}\right]_{a_0-a}^{a_0+a} = \frac{1}{2a}\left[\frac{a^3}{3} - \left(-\frac{a^3}{3}\right)\right] = \frac{a^2}{3} = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$\boldsymbol{\sigma(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}}$$ con $\Delta = 2a$ piena larghezza dell'intervallo

$\boxed{\text{PDF triangolare}}$

$$\mu(x) = a_0$$

$$\sigma^2(x) = \frac{a^2}{6} = \frac{\Delta^2}{24}$$

$$\sigma(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{24}}$$

PDF uniforme: Dimostrazione che $\mu(x) = a_0$

$$\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx = \int_{a_0-a}^{a_0+a} x \frac{1}{2a}\, dx =$$

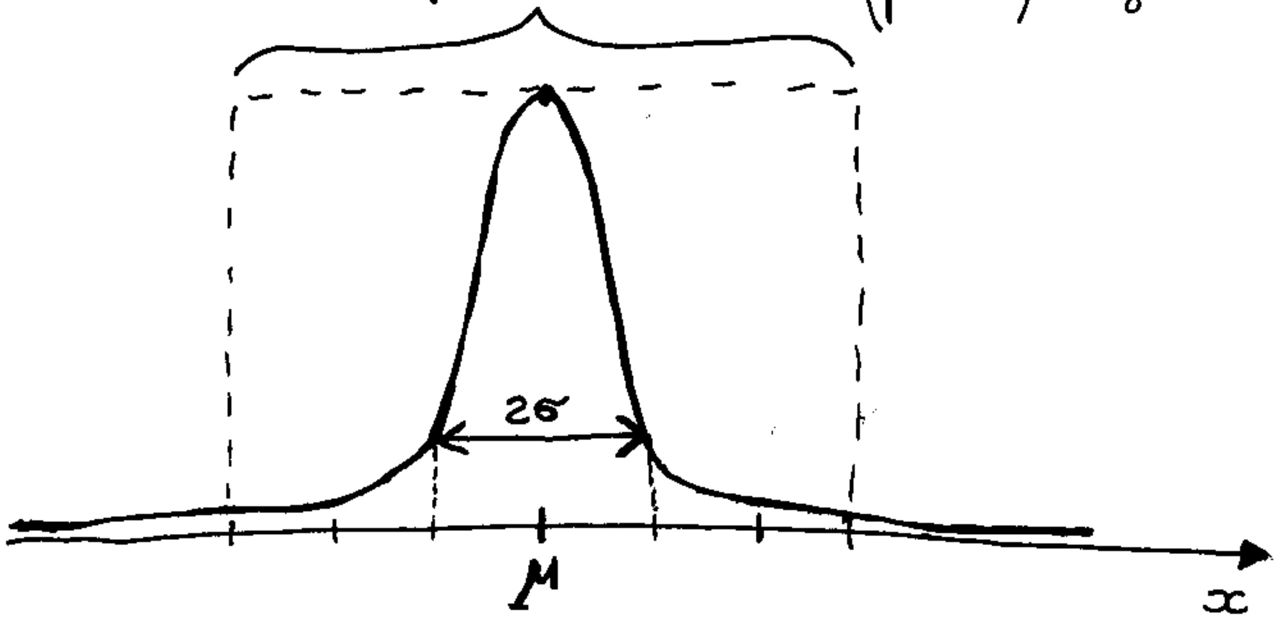
$$= \frac{1}{2a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{a_0-a}^{a_0+a} = \frac{1}{4a} \left[(a_0+a)^2 - (a_0-a)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{4a}\, 4 a_0 a = a_0$$

- Calcolo μ_B partendo dalla conoscenza di un intervallo di confidenza con probabilità P: utilizzo (ipotizzo) una PDF normale con lo stesso livello di confidenza e utilizzo la sua σ come stima della μ_B

- Calcolo μ_B partendo dalla conoscenza di una incertezza estesa $U_B = K\mu_B$ e dividendo per il fattore K.

ESEMPIO di calcolo di μ_B dalla conoscenza di intervallo con confidenza 99.7 % e (piena) larghezza L

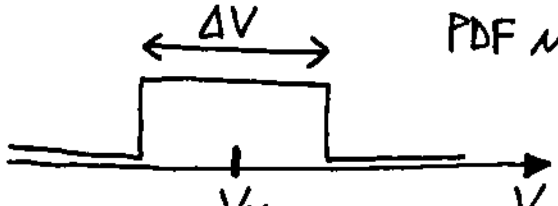


$$\pm 3\sigma = 6\sigma = L \Rightarrow \mu(x) = \sigma = \frac{L}{6}$$

ESEMPIO di calcolo di μ_B per una misura quantizzata

Voltmetro con portata (dinamica) $\pm 10\,V$ e risoluzione di 20 000 livelli

La risoluzione dimensionale è $\Delta V = \frac{20\,V}{20\,000} = 1\,mV$



PDF uniforme

$$\mu(V_M) = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}} \cong 0.29\,mV$$

▷ Quando si vuole definire un intervallo di valori, attorno al valore di misura $y = \bar{y}$, all'interno del quale si ritiene che il misurando debba "cadere" con un certo livello di confidenza (probabilità P), si parla di INCERTEZZA ESTESA

$$U = K \, u_c$$

con K FATTORE DI COPERTURA

▷ Parleremo invece di INCERTEZZA RELATIVA quando normalizziamo il valore di incertezza tipo al valore di misura

$$u_{r,c}(y) = \frac{u_c(y)}{\bar{y}} \qquad [1]$$

Incertezze relative anche di grandezze diverse (non omologhe) possono in qualche modo essere confrontate direttamente fra loro. Questo parametro indica, indipendentemente dal valore e tipo del misurando, il grado di conoscenza che abbiamo raggiunto sul valore di misura.

Per le misure dirette, ricordiamo che $\mu_c^2 = \mu_A^2 + \mu_B^2$

Vediamo ora come si affronta il calcolo dell'incertezza combinata in una <u>MISURA INDIRETTA</u>

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) - \cancel{\delta f} \quad \text{RELAZIONE FUNZIONALE}$$

inc. di modello

In generale sarà $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$

In un intorno di $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)$ possiamo sviluppare la funzione $f(\cdot)$ in serie di Taylor, al prim'ordine, così da ottenere:

$$(y-\bar{y}) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{y}}(x_1-\bar{x}_1) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\bar{y}}(x_2-\bar{x}_2) + \dots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_N}\right|_{\bar{y}}(x_N-\bar{x}_N)$$

$$E\left\{(y-\bar{y})^2\right\} = E\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{y}} \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{\bar{y}} (x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j)\right\} =$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 (x_i-\bar{x}_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{y}} \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{\bar{y}} (x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j)\right\}$$

Ricordiamo che

$$E\left\{(x_i-\bar{x}_i)^2\right\} \triangleq \sigma^2(x_i) = \mu^2(x_i)$$

è la VARIANZA della variabile x_i

e definiamo COVARIANZA tra x_i e x_j

$$E\left\{(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j)\right\} \triangleq \sigma^2(x_i, x_j) = \mu(x_i, x_j)$$

▷ Il valore di misura della grandezza Y sarà dato da

$$y = \bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N)$$

▷ con una incertezza (combinata o composta)

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j \, u(x_i, x_j)}$$

■ avendo definito i COEFFICENTI DI SENSIBILITA'

$$c_i \triangleq \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{y}}$$

ossia pari alle derivate prime (parziali) rispetto alla variabile x_i corrente.

Il coefficente di sensibilità c_i indica come varia il misurando Y in corrispondenza a una variazione del parametro X_i di dipendenza.

In generale, ogni incertezza $u(x_i)$ sarà data da:

$$u_c(x_i) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} = \sqrt{S^2(\bar{x}_i) + u_B^2(x_i)} = \sqrt{\frac{S^2(x_i)}{n} + u_B^2(x_i)}$$

- Coefficiente di correlazione

$$r_{ij}(x_i,x_j) \triangleq \frac{u(x_i,x_j)}{u(x_i)\,u(x_j)} \in [-1,+1]$$

$$r_{ij} = 0 \Longleftarrow x_i \text{ e } x_j \text{ STATISTICAMENTE INDIPENDENTI}$$

- Utilizzando la definizione di coefficiente di correlazione, si può anche esprimere l'incertezza composta sul risultato di misura come

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j r_{ij}(x_i,x_j)\, u(x_i) u(x_j)}$$

- Casi particolari di relazioni funzionali e u_c per variabili di ingresso statisticamente indipendenti:

- Misurando SOMMA o DIFFERENZA di più parametri

$$\bar{y} = \bar{x}_1 \pm \bar{x}_2 \pm \dots \pm \bar{x}_N \Longrightarrow u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u^2(x_i)}$$

L'incertezza di y è la somma (quadratica) delle incertezze degli x_i

- Misurando PRODOTTO o RAPPORTO di più parametri

$$\bar{y} = \bar{x}_1^{m_1} \times \bar{x}_2^{m_2} \times \dots \times \bar{x}_N^{m_N} \Longrightarrow \frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} m_i^2 \frac{u^2(x_i)}{x_i^2}}$$

L'incertezza relativa di y è la somma (quadratica) delle incertezze relative degli x_i pesate con i quadrati degli esponenti m_i

ESEMPIO $P = VI$

V e I sono misurate in maniera statisticamente indipendente portando a $V = \bar{V} \pm u(V)$ e $I = \bar{I} \pm u(V)$
In particolare $V = 5V \pm 1\mu V$ e $I = 100mA \pm 1mA$
Il risultato della misura indiretta di P si ottiene da

$$\bar{P} = \bar{V}\bar{I}$$

e

$$\frac{u_c(P)}{P} = \sqrt{\frac{u^2(V)}{V^2} + \frac{u^2(I)}{I^2}}$$

e pertanto

$$P = \bar{P} \pm u_c(P) = \bar{P}\left[1 \pm \frac{u_c(P)}{\bar{P}}\right]$$

Utilizzando i valori numerici specifici, si ha

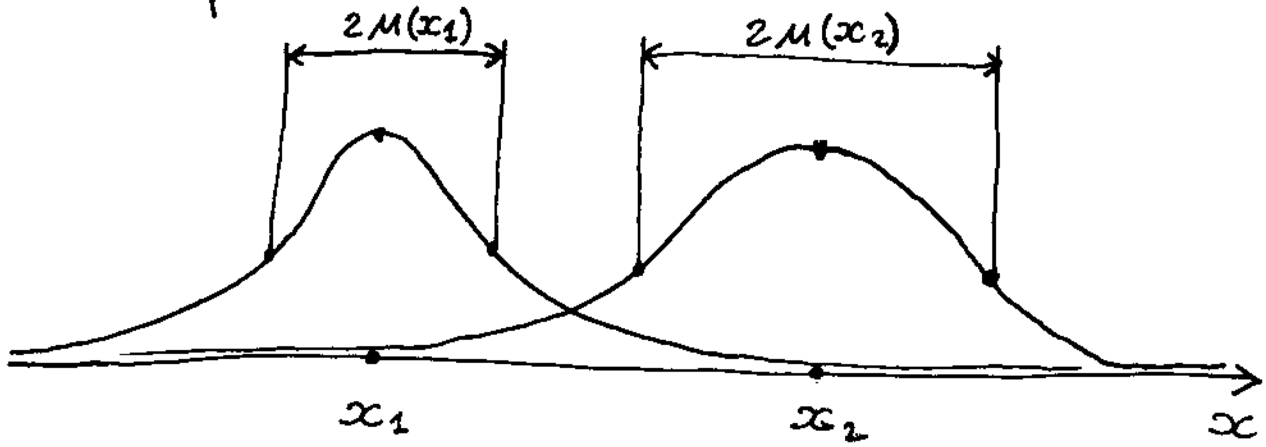
$$\bar{P} = (5V) \times (0.1\,A) = 0.5\,W$$

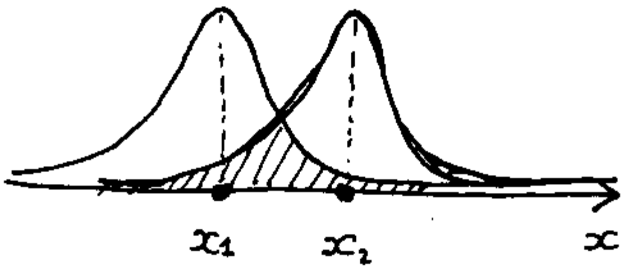
$$\frac{u_c(P)}{P} = \sqrt{\frac{10^{-12}V^2}{25\,V^2} + \frac{10^{-6}A}{10^{-2}A}} = \sqrt{4 \times 10^{-14} + 10^{-4}} \cong 10^{-}$$

L'incertezza relativa più grande, quella sulla corrente, domina sull'incertezza degli altri parametri da cui P dipende (qui solo V) e pertanto determina praticamente da sola l'incertezza di P

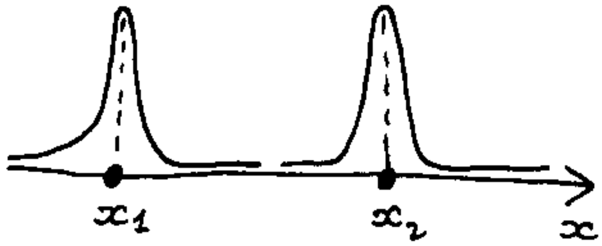
$$P = 0.5\,W\left[1 \pm 10^{-2}\right] = 0.5\,W \pm 5\,mW$$

▷ Compatibilità tra due misure





MISURE COMPATIBILI

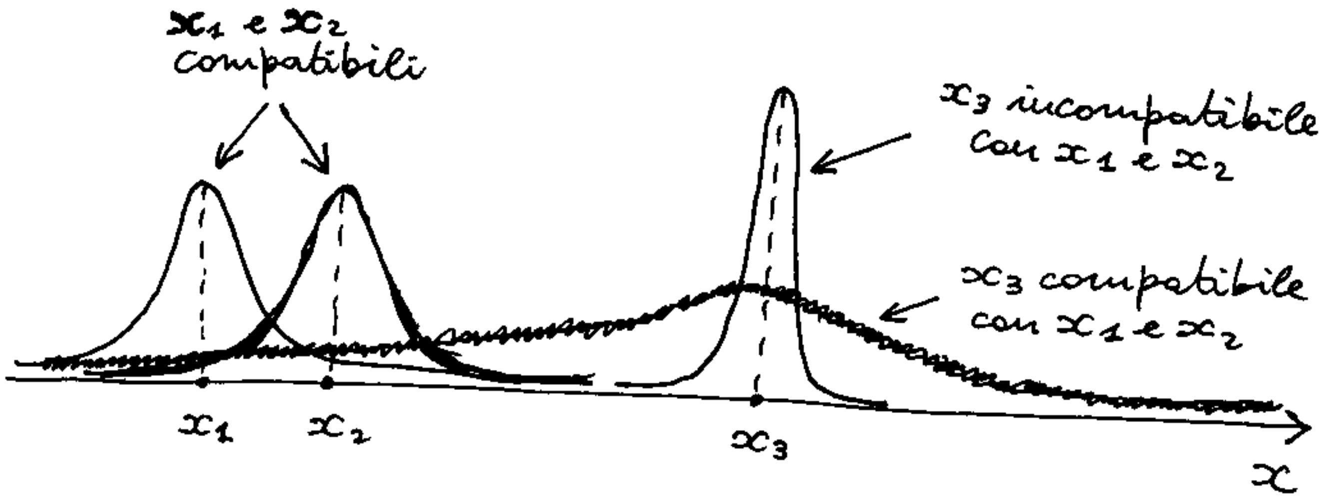


MISURE INCOMPATIBILI

■ COMPATIBILITA' fra x_1 e x_2

$$d = | x_1 - x_2 | \leq K \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) - 2 r_{12} u(x_1) u(x_2)}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{distanza fra i} \\ \text{due risultati} \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{c} \text{"combinazione" delle incertezze} \\ \text{associate alle due misure} \end{array} \right)$$



▷ Media pesata

Nel caso di N risultati di misura, COMPATIBILI fra loro, indipendenti e normalmente distribuit

$$x = \bar{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{u^2(x_i)}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{u^2(x_i)}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} W_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} W_i}$$

i PESI $W_i = \frac{1}{u^2(x_i)}$ sono i reciproci delle varianze stimate e dunque indicano il grado di confidenza che abbiamo sulla validità dei risultati x_i (loro dispersione)

L'incertezza della media pesata è data da

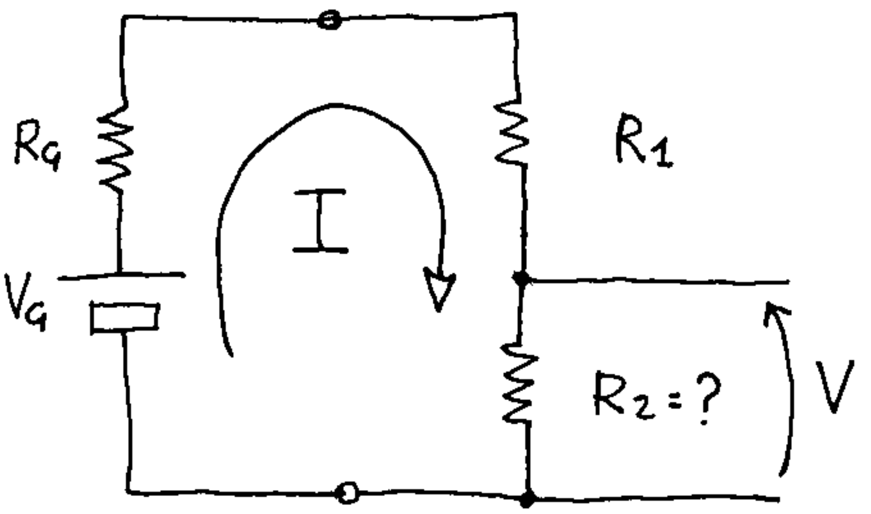
$$u^2(\bar{x}_p) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{u^2(x_i)}}$$

Dunque, "in termini equivalenti di incertezze relative (o meglio dei loro reciproci)", si ha

$$\frac{\bar{x}}{u^2(\bar{x}_p)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{u^2(x_i)}$$

$$W_p \bar{x}_p = \sum_{i=1}^{N} W_i x_i \qquad \text{con } W_p = \sum_{i=1}^{N} W_i$$

ESEMPIO (di calcolo dell' INC composta in una misura indiretta)



- V_G è data pari a $+12\,V$ e $U(V_G) = 10\,mV$ con $K = 2$
- R_G è nota attraverso $n = 10$ letture ripetute, $R_{G,K}$, con $\bar{R}_G = 50\,\Omega$ e $u(R_{G,K}) = 12.65\,\Omega$
- $R_1 = 1\,K\Omega \pm 5\,\Omega$
- $V = 7.77\,V$ letta con un voltmetro a 3½ cifre ($\pm 19.99\,V$) "ideale" (solo errore di quantizzazione)

① Calcolare l'INC, assoluta e relativa, di tutti i parametri coinvolti nella misura

② Calcolare R_2, la sua INC e la sua INC relativa

③ Quali parametri sono determinanti, e quali trascurabili, per il calcolo di $u(R_2)$?

$$I = \frac{V_G}{R_G + R_1 + R_2} = \frac{V}{R_2}$$ (descrizione analitica del fenomeno fisico)

$$R_2 V_G = (R_G + R_1 + R_2)\, V$$

$$R_2 (V_G - V) = (R_G + R_1)\, V$$

$$R_2 = \frac{V}{V_G - V}(R_G + R_1) = f(V_G, V, R_G, R_1)$$

RELAZIONE FUNZIONALE
(equazione della misura)

$$u^2(R_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial V_G}\right)^2 u^2(V_G) + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2 u^2(V) + \left(\frac{\partial f}{\partial R_G}\right)^2 u^2(R_G) + \left(\frac{\partial f}{\partial R_1}\right)^2 u^2(R$$

Coefficienti di sensibilità (elevati al quadrato)
[dicono come R_2 varia al variare di un parametro di dipendenza

$\boxed{1}$ $u(V_G) = U(V_G)/K = 5 \times 10^{-3}\ V$; $u_r(V_G) = \dfrac{u(V_G)}{V_G} = 4.2\times$

$u(V) = \dfrac{0.01\ V}{\sqrt{12}} = 2.9\times 10^{-3}\ V$; $u_r(V) = \dfrac{u(V)}{V} = 3.7 \times 10^{-}$

$u(R_1) = 5\ \Omega$; $u_r(R_1) = \dfrac{u(R_1)}{R_1} = 5 \times 10^{-3}$

$u(R_G) = u(\overline{R}_G) = \dfrac{u(R_{G,K})}{\sqrt{n}} = \dfrac{12.65\ \Omega}{\sqrt{10}} = 4\ \Omega$;

$u_r(R_G) = \dfrac{u(R_G)}{R_G} = 8 \times 10^{-2}$

$\boxed{2}$ $R_2 = \overline{R}_2 = \dfrac{\overline{V}}{\overline{V}_G - \overline{V}}(\overline{R}_G + \overline{R}_1) = \dfrac{7.77\ V}{4.23\ V} \times 1050\ \Omega$

$R_2 = \mathbf{1928.7}\ \Omega$

$$\mu^2(R_2) = \left[-\frac{V(R_G+R_1)}{(V_G-V)^2}\right]^2 \mu^2(V_G) + \left[\frac{R_G+R_1}{V_G-V} + \frac{V(R_G+R_1)}{(V_G-V)^2}\right]^2 \mu^2(V$$

$$+ \left[\frac{V}{V_G-V}\right]^2 \left\{\mu^2(R_G) + \mu^2(R_1)\right\} =$$

$$= 2.08\times 10^6 \frac{\Omega^2}{V^2} \cdot 2.50\times 10^{-5} V^2 +$$

$$+ 4.96\times 10^5 \frac{\Omega^2}{V^2} \cdot 8.41\times 10^{-6} V^2 +$$

$$+ 3.37 \cdot 41\ \Omega^2 =$$

$$= (52 + 4.17 + 138.17)\ \Omega^2 = 194.34\ \Omega^2$$

$$\mu(R_2) = \sqrt{\mu^2(R_2)} = 13.9\ \Omega$$

$$\mu_r(R_2) = \frac{\mu(R_2)}{R_2} = 7.2\times 10^{-3}$$

3 Le incertezze associate a R_G e a R_1 danno il maggiore contributo all'incertezza di R_2 (circa in parti uguali), mentre l'incertezza sulla tensione del voltmetro V contribuisce in maniera quasi trascurabile (~ 1/50 dei rimanenti contributi).