Lez. 9 Es. 1

INC. COMPOSTA NEL CASO DI VARIABILI DI INGRESSO STATISTICAMENTE INDIP.

Tutti i termini di covarianza e dunque i coefficienti di correlazione sono nulli (tra x_i e x_j con $i \neq j$) e pertanto

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i)}$$

ovvero

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2\, u^2(x_i)$$ COMBINAZIONE DI VARIANZE

Quando si vuole definire un intervallo di valori, attorno al valore di misura $y = \bar{y}$, all'interno del quale si ritiene che il misurando debba "cadere" con un certo livello di confidenza (probabilità P), si utilizza la INCERTEZZA ESTESA

$$U(y) = K\, u_c(y)$$

con K FATTORE DI COPERTURA

Parleremo invece di INCERTEZZA RELATIVA quando normalizziamo il valore di incertezza tipo al valore di misura

$$u_{r,c}(y) = \frac{u_c(y)}{\bar{y}} \qquad [1] \text{ numero puro!}$$

Incertezze relative anche di grandezze diverse (non omologhe) possono in qualche modo essere confrontate direttamente fra loro. Questo parametro indica, indipendentemente dal valore e tipo del misurando, il grado di conoscenza che abbiamo raggiunto sul valore di misura

Casi particolari di RELAZIONI FUNZIONALI per variabili d'ingresso (x_i) statisticamente indipendenti ($r_{ij} \equiv 0 \quad \forall i,j$)

- Misurando SOMMA o DIFFERENZA delle x_i

$$\bar{y} = \bar{x}_1 \pm \ldots \pm \bar{x}_i \pm \ldots \pm \bar{x}_N$$

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u^2(x_i)} \quad \text{ossia} \quad u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u^2(x_i)$$

- Misurando PRODOTTO o RAPPORTO delle x_i

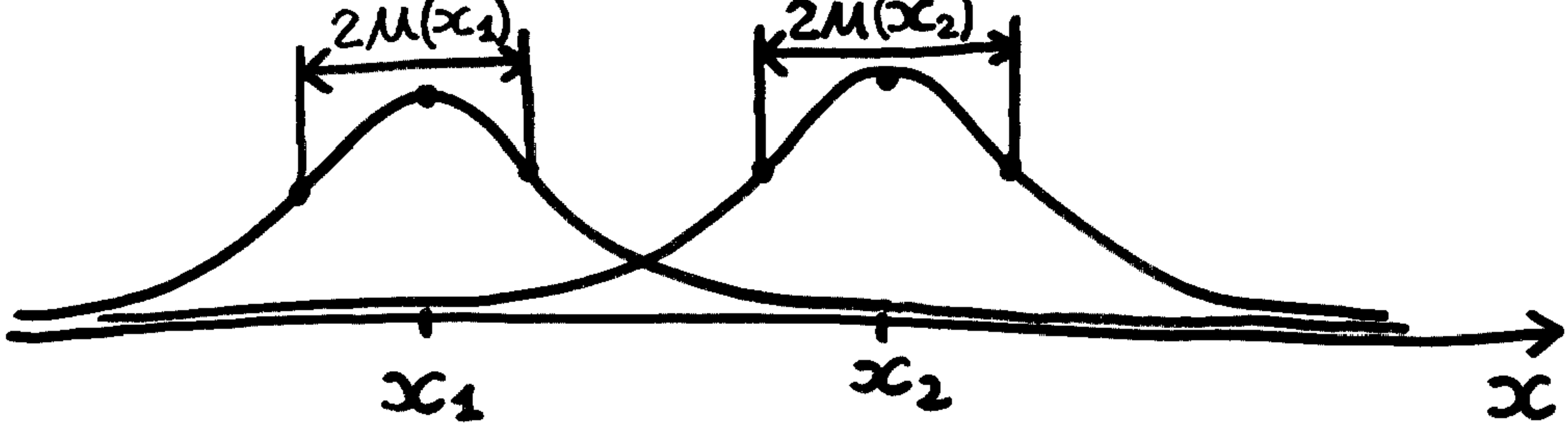
$$\bar{y} = \bar{x}_1^{n_1} \times \ldots \times \bar{x}_i^{n_i} \times \ldots \times \bar{x}_N^{n_N}$$

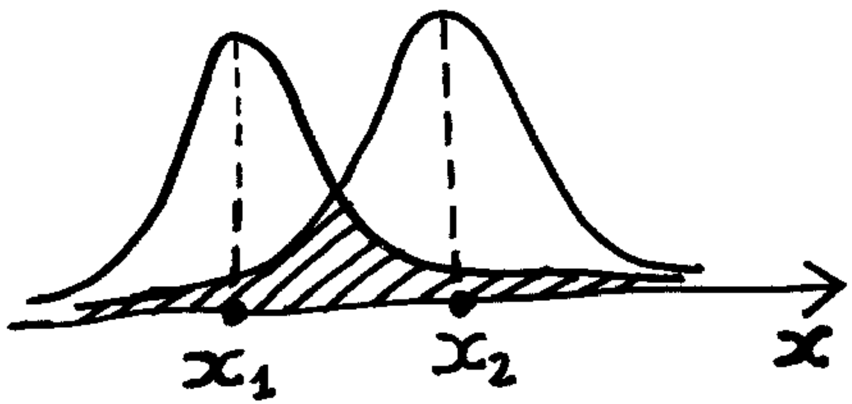
$$\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} n_i^2 \frac{u^2(x_i)}{x_i^2}} \quad \text{o} \quad u_{r,c}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} n_i^2 u_r^2(x_i)}$$

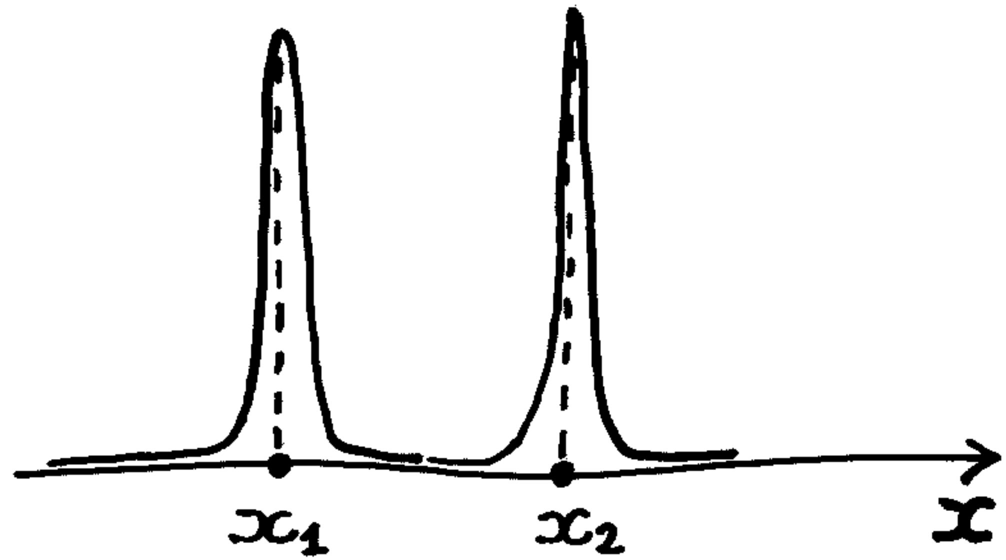
Se $n_i = \pm 1 \quad \forall i$, ossia se la rel. funz. è espressa da prodotti e rapporti "semplici", si ottiene

$$u_{r,c}^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_r^2(x_i)$$

COMPATIBILITA' TRA DUE MISURE







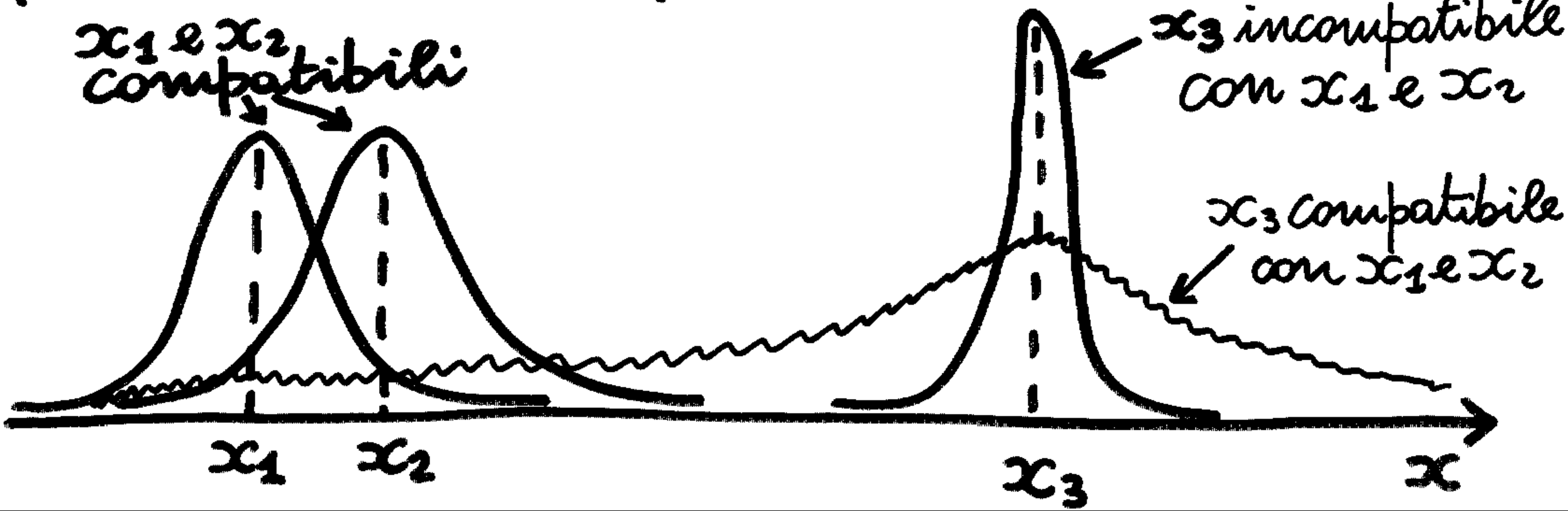
MISURE COMPATIBILI

MISURE INCOMPATIBILI

COMPATIBILITA' TRA x_1 E x_2

$$d = |x_1 - x_2| \leq K \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) - 2 r_{12}\, u(x_1)\, u(x_2)}$$

(distanza tra i due risultati) $\leq$ ("combinazione" delle incertezze associate alle due misure)



MEDIA PESATA tra misure compatibili

Nel caso di N risultati di misura, compatibili fra loro, indipendenti e normalmente distribuiti

$$x = \overline{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{u^2(x_i)}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{u^2(x_i)}} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

i PESI $w_i = \dfrac{1}{u^2(x_i)}$ sono i reciproci delle varianze stimate e dunque indicano il grado di confidenza che abbiamo sugli x_i

INCERTEZZA DELLA MEDIA PESATA

$$\mu^2(\overline{x}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\mu^2(x_i)}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

Dunque, "in termini di incertezze relative (dei loro reciproci)", si ha

$$\frac{\overline{x}}{\mu^2(\overline{x})} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\mu^2(x_i)}$$

ESERCIZIO Legge dei gas perfetti

$$p = n\frac{RT}{V} = f(n, R, T, V)$$ RELAZIONE FUNZIONALE

$R = 8{,}31$ $Pa \cdot m^3/(mol \cdot K)$ $\quad u(R) = 0$

$n = 2\ mol$ $\quad u(n) = 10^{-6}$

$T = 300\ K$ $\quad u(T) = 0.1\ K$

$V = 1\ m^3$ da $V = L^3$ con $L = 1\ m \pm 1\ mm$

$$u(V) = \sqrt{\left[\frac{\partial V}{\partial L}\right]^2 u^2(L)} = \sqrt{\left[3\,m^2\right]^2 \times \left[10^{-3}\,m\right]^2} =$$

$$= \sqrt{9 \times 10^{-6}\,m^6} = 3 \times 10^{-3}\,m^3$$

$$u(p) = \sqrt{\left[\frac{\partial p}{\partial n}\right]^2 u^2(n) + \left[\frac{\partial p}{\partial T}\right]^2 u^2(T) + \left[\frac{\partial p}{\partial V}\right]^2 u^2(V)}$$

$$p = \frac{2\,[mol] \times 8{,}31\,[Pa \cdot m^3/(mol \cdot K)] \times 300\,[K]}{1\,[m^3]} \cong 4800\,Pa$$

$$u(p) = \sqrt{\left[\frac{RT}{V}\right]^2 u^2(n) + \left[\frac{nR}{V}\right]^2 u^2(T) + \left[\frac{nRT}{-V^2}\right]^2 u^2(V)} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{nRT}{V}\right]^2 \frac{u^2(n)}{n^2} + \left[\frac{nRT}{V}\right]^2 \frac{u^2(T)}{T^2} + \left[\frac{nRT}{-V}\right]^2 \frac{u^2(V)}{V^2}} =$$

$$u_r(p) = \sqrt{u_r^2(n) + u_r^2(T) + u_r^2(V)}$$

$$u_r^2(n) = 10^{-12}$$

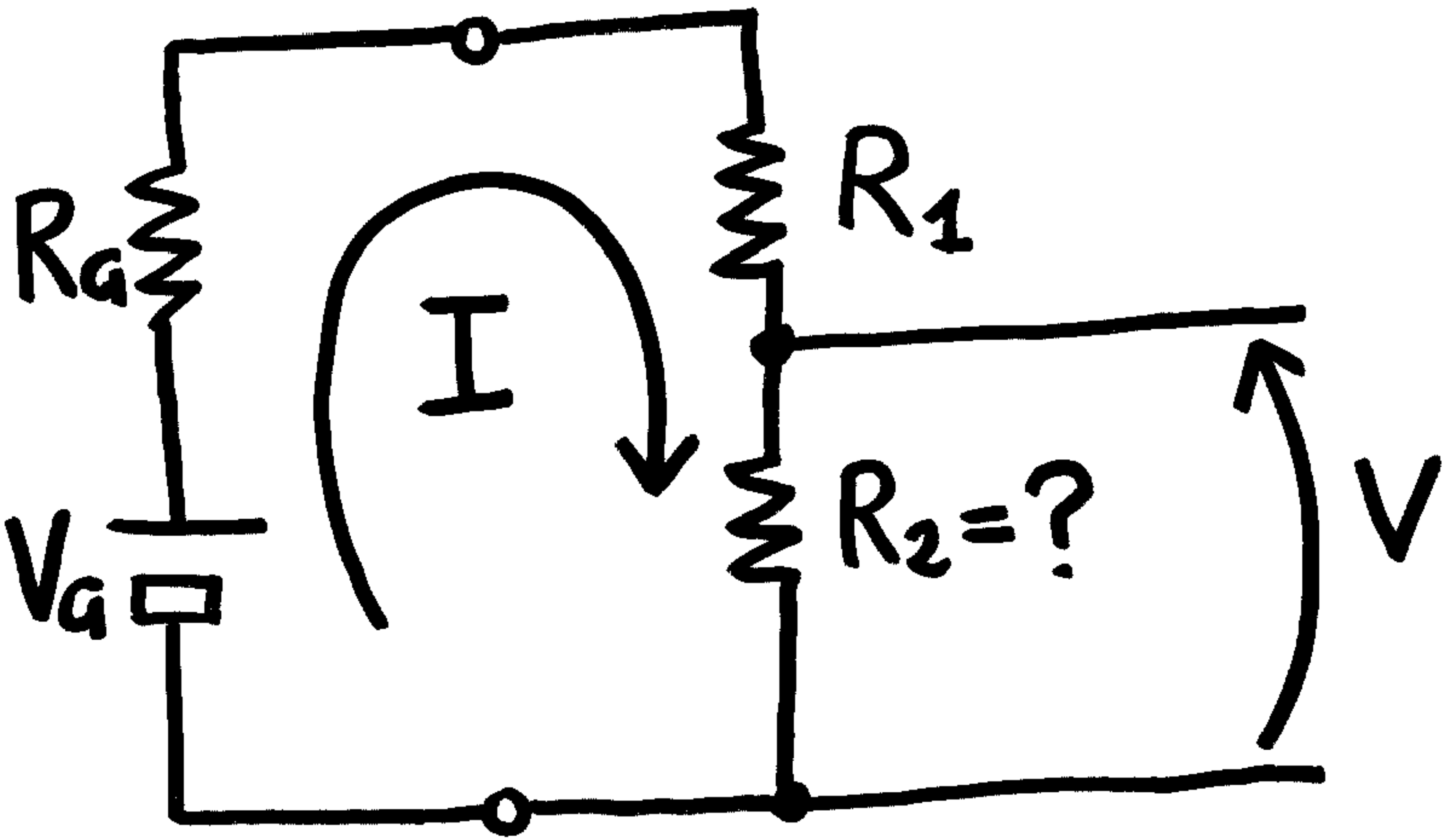
$$u_r^2(T) = \frac{(0.1\,K)^2}{(300\,K)^2} \cong 1.1 \times 10^{-7}$$

$$u_r^2(V) = \frac{(3 \times 10^{-3}\,m^3)^2}{(1\,m^3)^2} = 9 \times 10^{-6}$$

$$u_r(p) = \sqrt{10^{-6}\left(10^{-6} + 0.11 + 9\right)} \cong 3 \times 10^{-3}$$

$$u(p) = u_r(p) \times p = 14.4\ Pa \cong 15\ Pa$$

ESERCIZIO: calcolo dell'incertezza composta in una misura indiretta su un circuito elettrico



- V_G è data pari a $+12\,V$ e $U(V_G) = 10\,mV$ con $K=2$
- R_G è nota attraverso $n=10$ letture ripetute, $R_{G,K}$, con $\overline{R_G} = 50\,\Omega$ e $s(R_{G,K}) = 12.65\,\Omega$
- $R_1 = 1\,K\Omega \pm 5\,\Omega$
- $V = 7.77\,V$ letta con un voltmetro a 3½ cifre con ~~(~~$\pm 19.99\,V$ di dinamica~~)~~ e "ideale" (solo errore di quantizzazione)

① Calcolare l' INC, assoluta e relativa, di tutti i parametri coinvolti nella misura

② Calcolare R_2, la sua INC e la sua INC relativa ($u(R_2)$ e $u_r(R_2)$)

③ Quali parametri sono determinanti, e quali sono trascurabili, per il calcolo di $u(R_2)$?

$$I = \frac{V_G}{R_G + R_1 + R_2} = \frac{V}{R_2}$$ descrizione analitica del fenomeno fisico in esame

$$R_2 \; V_G = (R_G + R_1 + R_2) V$$

$$R_2 (V_G - V) = (R_G + R_1) V$$

$$R_2 = \frac{V}{V_G - V}(R_G + R_1) = f(V_G, V, R_G, R_1)$$

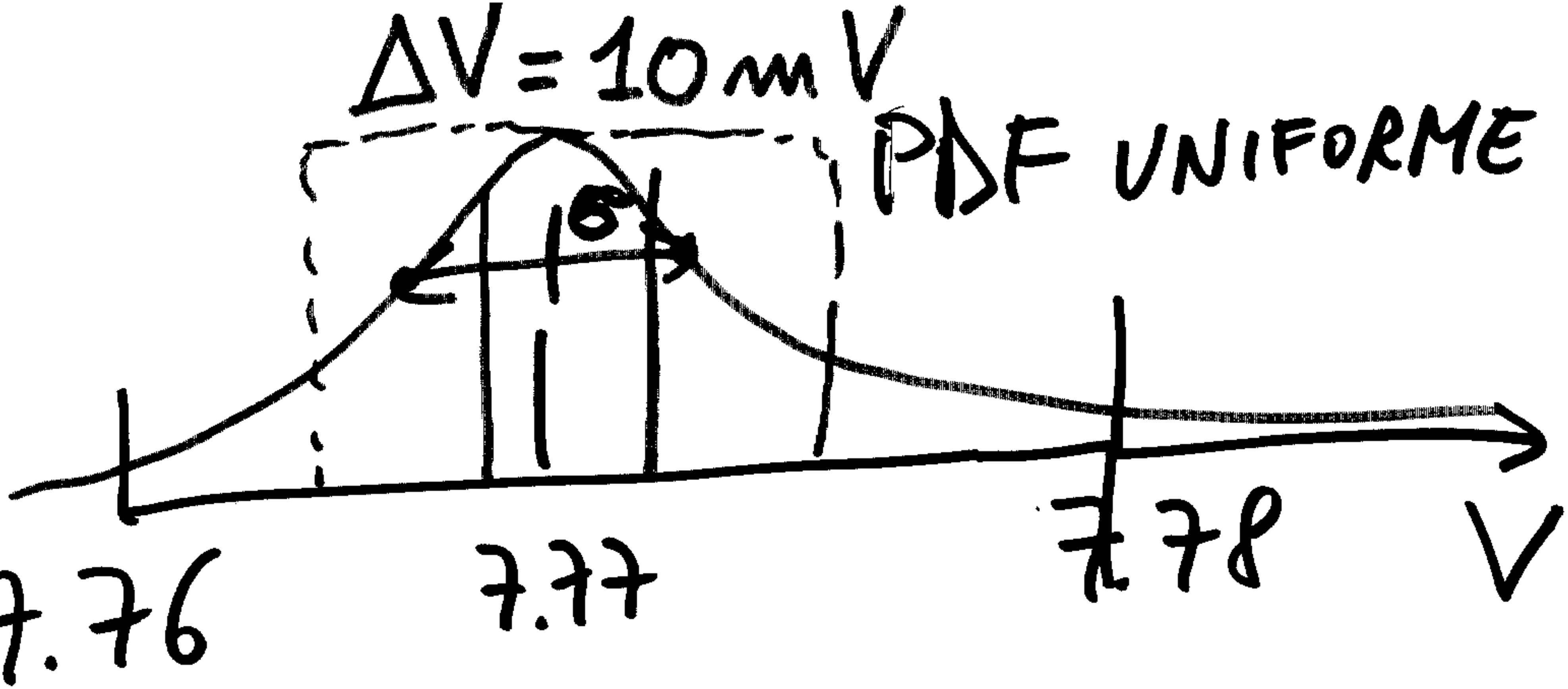
RELAZIONE FUNZIONALE

$\boxed{1}$ $$u(V_G) = U(V_G)/K = 5\times10^{-3}\,V$$

$$u_r(V_G) = \frac{u(V_G)}{V_G} = \frac{5\times10^{-3}\,V}{12\,V} = 4.2\times10^{-4}$$

$$u(V) = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}} = \frac{0.01\,V}{\sqrt{12}} = 2.9\times10^{-3}\,V$$

$$u_r(V) = \frac{u(V)}{V} = \frac{2.9\times10^{-3}\,V}{7.77\,V} = 3.7\times10^{-4}$$



7.765 7.775

$$u(V) = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}}$$

$$u(R_1) = 5\,\Omega$$

$$u_r(R_1) = \frac{u(R_1)}{R_1} = \frac{5\,\Omega}{1000\,\Omega} = 5\times10^{-3}$$

$$u(R_G) = u(\bar{R}_G) = \frac{s(R_{G,k})}{\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{12.65\,\Omega}{\sqrt{10}} = 4\,\Omega$$

$$u_r(R_G) = \frac{u(R_G)}{R_G} = \frac{4\,\Omega}{50\,\Omega} = 8\times10^{-2}$$

$$u^2(R_2) = \left[\frac{\partial f}{\partial V_G}\right]^2 u^2(V_G) + \left[\frac{\partial f}{\partial V}\right]^2 u^2(V) +$$

$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial R_G}\right]^2 u^2(R_G) + \left[\frac{\partial f}{\partial R_1}\right]^2 u^2(R_1)$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ coefficiente di sensibilità

dice come f (ossia R_2) varia al variare di un parametro di dipendenza

② $R_2 = \bar{R}_2 = \dfrac{\bar{V}}{\bar{V}_G - \bar{V}} \left(\bar{R}_G + \bar{R}_1\right) =$

$$= \frac{7.77\,V}{4.23\,V}\, 1050\,\Omega = 1928.7\,\Omega$$

$$u^2(R_2) = \left[-\frac{V(R_G+R_1)}{(V_G-V)^2}\right]^2 u^2(V_G) +$$

$$+ \left[\frac{R_G+R_1}{V_G-V} + \frac{V(R_G+R_1)}{(V_G-V)^2}\right]^2 u^2(V) +$$

$$+ \left[\frac{V}{V_G-V}\right]^2 \left\{u^2(R_G) + u^2(R_1)\right\} =$$

$$= 2.08 \times 10^{6} \frac{\Omega^2}{V^2} \times 2.50 \times 10^{-5} V^2 +$$

$$+ 4.96 \times 10^{5} \frac{\Omega^2}{V^2} \times 8.41 \times 10^{-6} V^2 +$$

$$+ 3.37 \times 41 \Omega^2 =$$

$$= (52 + 4.17 + 138.17)\,\Omega^2 = 194.34\,\Omega^2$$

$$u(R_2) = \sqrt{u^2(R_2)} = 13.9\,\Omega \cong 14\,\Omega$$

$$u_r(R_2) = \frac{u(R_2)}{R_2} = 7.2 \times 10^{-3}$$

③ Le incertezze associate a R_G e R_1 danno il maggiore contributo alla incertezza di R_2 (circa in parti uguali), mentre l'incertezza sulla tensione del voltmetro, $u(V)$, contribuisce in maniera quasi trascurabile ($\sim 1/50$ dei rimanenti contributi)