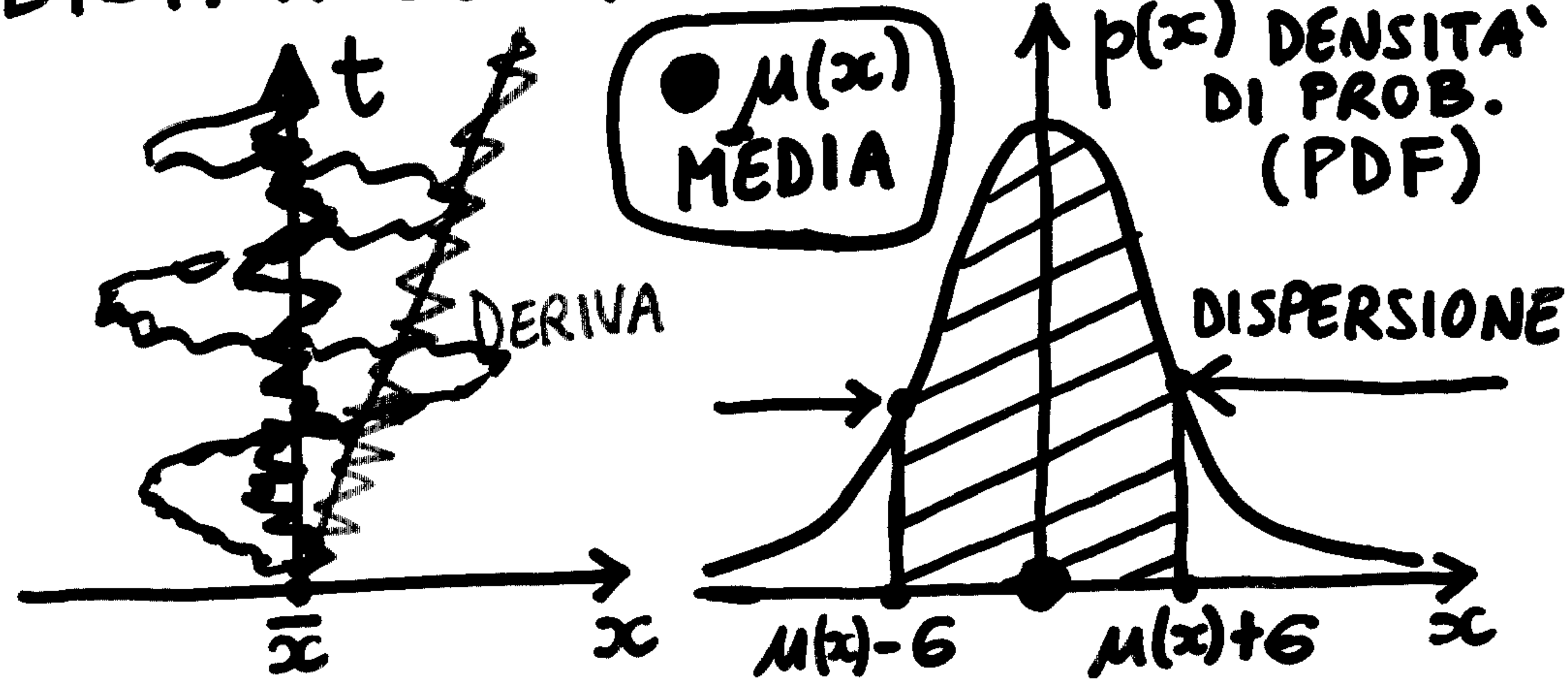
LEZ. 5 e 6

Misure ripetute dello stesso parametro fisico non forniscono lo stesso valore

DISP. VALORI $\Longrightarrow$ INCERTEZZA



ERRORE = VAL. MIS − VAL. VERO

INDETERMINATO

NON CONOSCIB.

$$\begin{array}{l} \nearrow \text{ ACCIDENTALI} \\ \text{ERRORI} \\ \searrow \text{ SISTEMATICI} \end{array}$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x)\,dx$$ PROBABILITA'

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$$ normalizzazione della PDF

MEDIA $\mu(x) = E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,dx$

VARIANZA $\sigma^2(x) = E\{[x-\mu(x)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x-\mu(x)]^2 p(x)\,dx$

DEVIAZIONE STANDARD $\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)}$

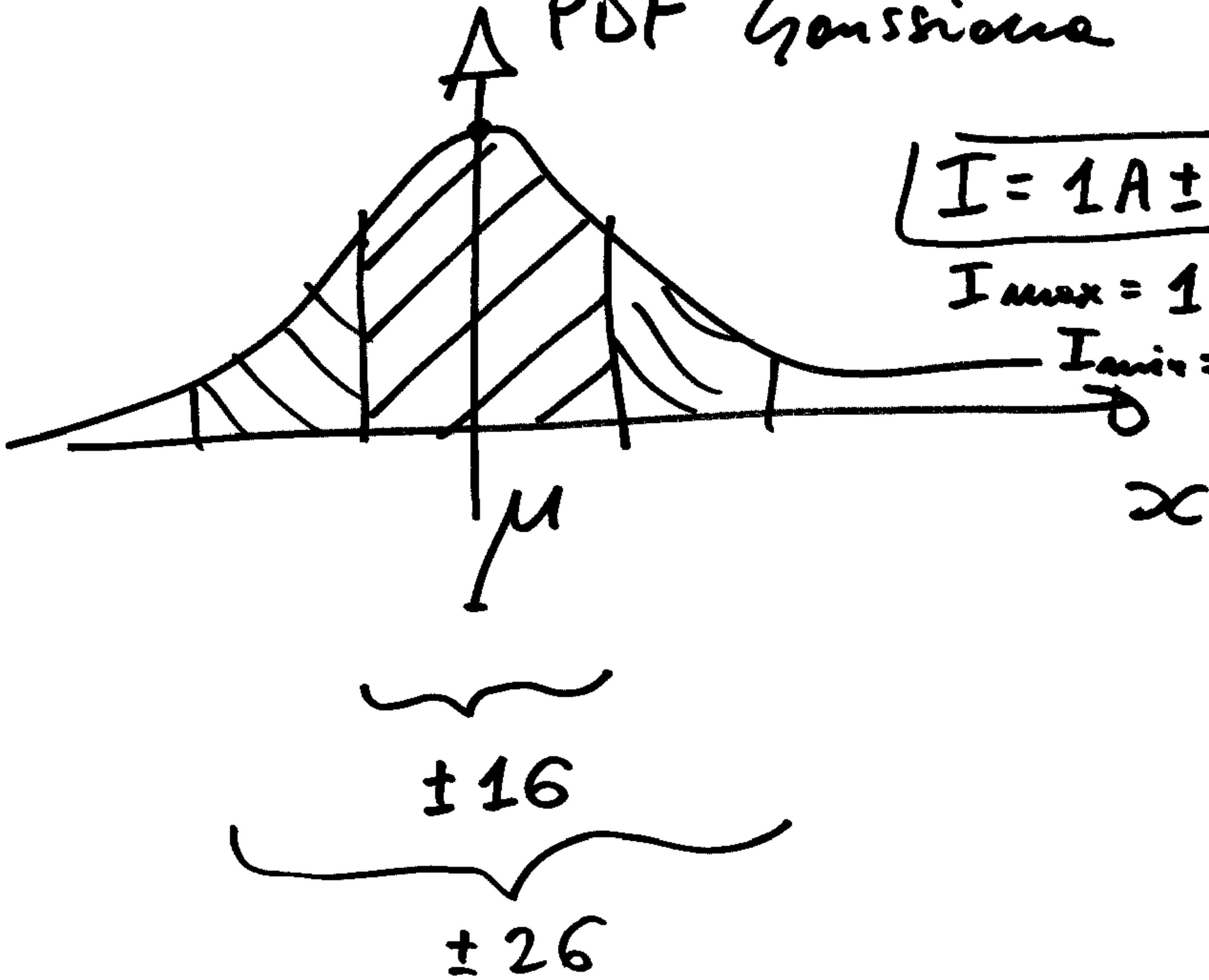
Distribuzione NORMALE (GAUSSIANA)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(x)} \exp\left\{ - \frac{[x-\mu(x)]^2}{2[\sigma(x)]^2} \right\}$$

LIVELLI DI CONFIDENZA
$$\begin{cases} 1\sigma & 68.27\% \sim 68.3\% \\ 2\sigma & 95.45\% \sim 95.5\% \\ 3\sigma & 99.73\% \sim 99.7\% \end{cases}$$

e.g. $P\left[\mu(x)-\sigma(x) \leq x \leq \mu(x)+\sigma(x)\right] \cong 68.27\%$

PDF Gaussiana



1σ level

$\boxed{I = 1A \pm 0.1A}$

$I_{max} = 1.1\ A$

$I_{min} = 0.9A$

2 CATEGORIE INC di misura

A - INC stimata con metodi statistici

B - INC stimata in altro modo ($\neq$ statistica)

Incertezza o scarto tipo, u dall'ingl. "uncertainty" è una stima della dev. standard σ, radice q. della varianza σ^2, prevista per il valore di misura

INC DI CATEGORIA A

Variabile x nota attraverso n determinazioni x_K $(K=1,2,\dots,n)$

STIMA del valor medio della (intera) popolazione, $\mu(x)$, attraverso lo stimatore MEDIA CAMPIONARIA

$$\mu(x) \stackrel{\Delta}{=} E[x] \stackrel{S}{=} \overline{x}_K = \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} x_K$$

$$\overline{x} = \overline{x}_K \stackrel{S}{=} \mu(x)$$

Per misure ripetute di una grandezza X il valore di misura x coincide con il valor medio delle determinazioni x_k ottenute:

$$x = \bar{x} = \overline{x_k} \quad \text{VALORE DI MISURA}$$

Per determinare la dispersione (incertezza) sul risultato di misura dobbiamo valutare la dispersione di $\bar{x}$:

STIMA della varianza della (intera) popolazione, $\sigma^2(x)$, attraverso lo stimatore VARIANZA CAMPIONARIA

$$\sigma^2(x) \triangleq E\left[(x-\bar{x})^2\right] \overset{S}{=} S^2(x_K) = \frac{1}{\underbrace{n-1}_{\nu \text{ GRADI DI LIBERTÀ}}} \sum_{K=1}^{n} (x_K - \bar{x})^2$$

$$S^2(x) = S^2(x_K) \overset{S}{=} \sigma^2(x)$$

inoltre $S^2(x_K) = \dfrac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{K=1}^{n} x_K^2\right) - n\bar{x}^2\right]$

La var. camp. di n camp. x_K si può calcolare come la somma dei singoli campioni al quadrato meno n volte la media dei campioni, il tutto diviso per $n-1$
al quad.

$$\sum (x_K - \bar{x})^2 = \sum \left(x_K^2 - 2x_K\bar{x} + \bar{x}^2 \right) =$$

$$= \left(\sum x_K^2 \right) - 2\bar{x} \underbrace{\left(\sum x_K \right)}_{n\bar{x}} + n\bar{x}^2 =$$

$$= \left(\sum x_K^2 \right) - n\bar{x}^2$$

$$\mu_A(x) = S(\bar{x}) = \frac{S(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}$$

standard uncertainty o incertezza tipo (di categoria A) indica la dispersione del risultato di misura ed è uno stimatore della deviazione standard di $\bar{x}$

$$\sigma^2(\bar{x}_k) = \sigma^2\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2\left[\sum_{k=1}^{n} x_k\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2(x_k) = \frac{1}{n^2}\, n\, \sigma^2(x_k) = \frac{\sigma^2(x_k)}{n}$$

ESERCIZIO: Calcolo dell'INC di Cat. A

Si dispone di $n = 10$ determinazioni di tensione V_k

Calcolare $\bar{V}$ e $u_A(\bar{V})$

$k\,[1]$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
$V_k\,[V]$	7, 9, 8, 6, 7, 5, 7, 8, 6, 7

$$V = \bar{V} = \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} V_K = \frac{1}{10}\,70V = 7V$$

$$\mu_A(V) = \frac{S(V)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{K=1}^{n}\left(V_K-\bar{V}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\left[\left(\sum_{K=1}^{n} V_K^2\right) - n\bar{V}^2\right]}$$

3^a espressione per $\mu_A(V)$

Si calcola $\sum_{K=1}^{n} V_K^2 = 502\,V^2$ e $\bar{V} = 7\,V$

$$\mu_A(V) = \sqrt{\frac{1}{10\times 9}\left[502\,V^2 - 10\times 49\,V^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{12}{90}\,V^2} \cong 0.36\,V$$

2^a espressione per $\mu_A(V)$

Ci conviene prima calcolare i $(V_k - \bar{V})$

$(V_k - \bar{V})$ $[V]$ $0, +2, +1, -1, 0, -2, 0, +1, -1, 0$

per poi ricavare

$$\mu_A(V) = \sqrt{\frac{1}{10 \times 9}(0+4+1+1+0+4+0+1+1+0)V^2}$$

$$= \sqrt{\frac{12}{90} V^2} \cong 0.36\ V$$

1ª espressione per $\mu_A(V)$
dobbiamo prima calcolare/conoscere
la radice della var. campionaria
$s(V) = 1.1547\ V$ e dividere per $\sqrt{n}$

$$\mu_A(V) = \frac{1.1547\ V}{\sqrt{10}} \cong 0.36\ V$$

1^a espressione per $\mu_A(V)$
dobbiamo prima calcolare/conoscere
la radice della var. campionaria

$$S(V) = 1.1547\ V$$ e dividere per $\sqrt{n}$

$$\mu_A(V) = \frac{1.1547\ V}{\sqrt{10}} \cong 0.36\ V$$

RISULTATO DI MIS.

$$V = 7{,}00\,V \pm 0.36\,V$$

$$V \simeq 7{,}0\,V \pm 0{,}4\,V$$

$$V = 7{,}00(36)\,V$$

$$\bar{V} = 5280\ V$$

$$u(V) = 300\ V = 3{,}0 \times 10^{2}\ V$$

$$V = 5\boxed{28}0\ V \pm \boxed{30}0\ V \Longrightarrow$$

$$= 5{,}3\cancel{0} \times 10^{3}\ \cancel{V} \pm 0.3 \times 10^{+3}\ V$$

$$= 528(30) \times 10^{1}\ V$$

$$\bar{V} = 5280\ V$$

$$u(V) = 0{,}36\ V$$

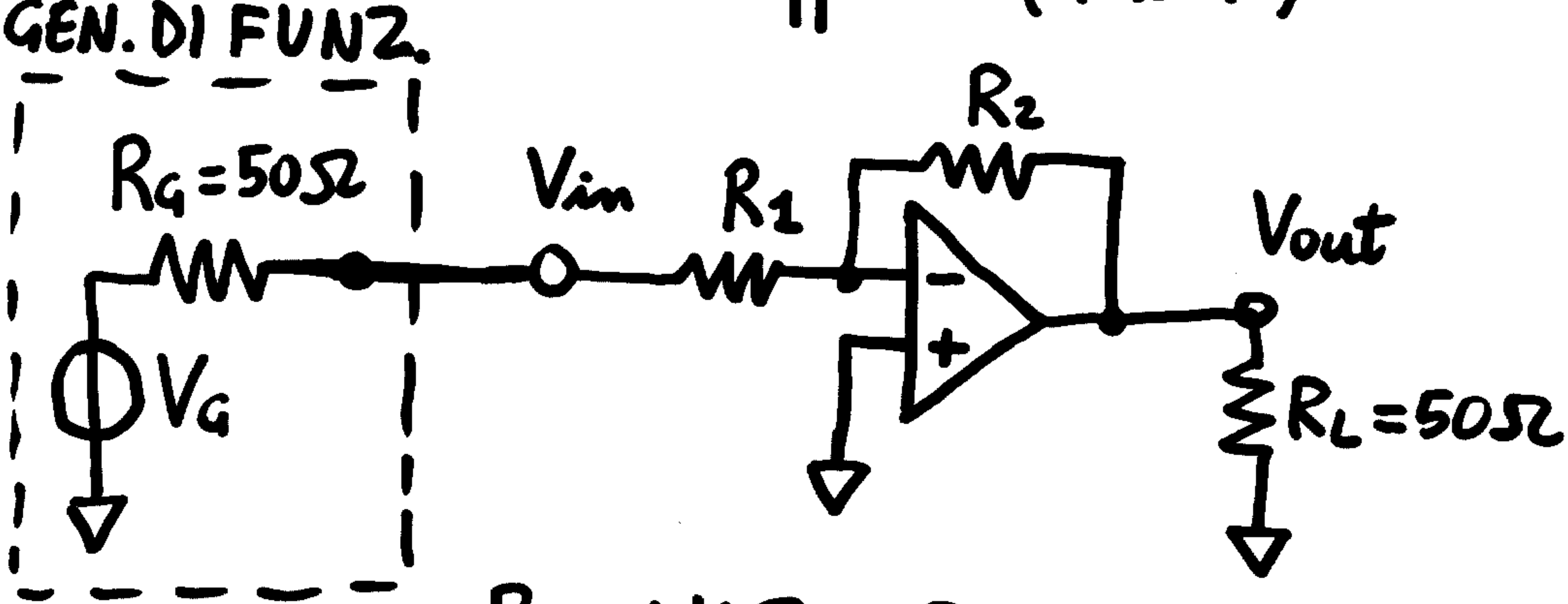
$$V = \bar{V} \pm u(V) =$$

$$= 5'280{,}00\ V \pm 0.36\ V =$$

$$= 5280{,}00(36)\ V$$

ESERCIZIO: calcolo $P|_{dBm}$

e rapporti (P o V) in dB

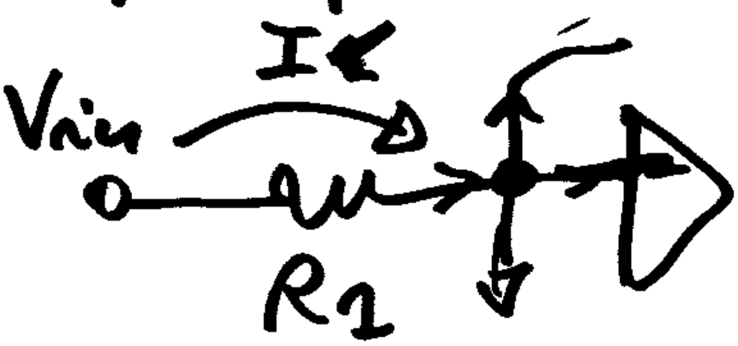


$R_1 = 1K\Omega \gg R_G \qquad R_2 = 10K\Omega$

$$V_{out} = -\frac{R_2}{R_1} V_{in} \qquad P_{out} = \frac{V_{out}^2}{R_L}$$

Se $R_1 >> R_g$

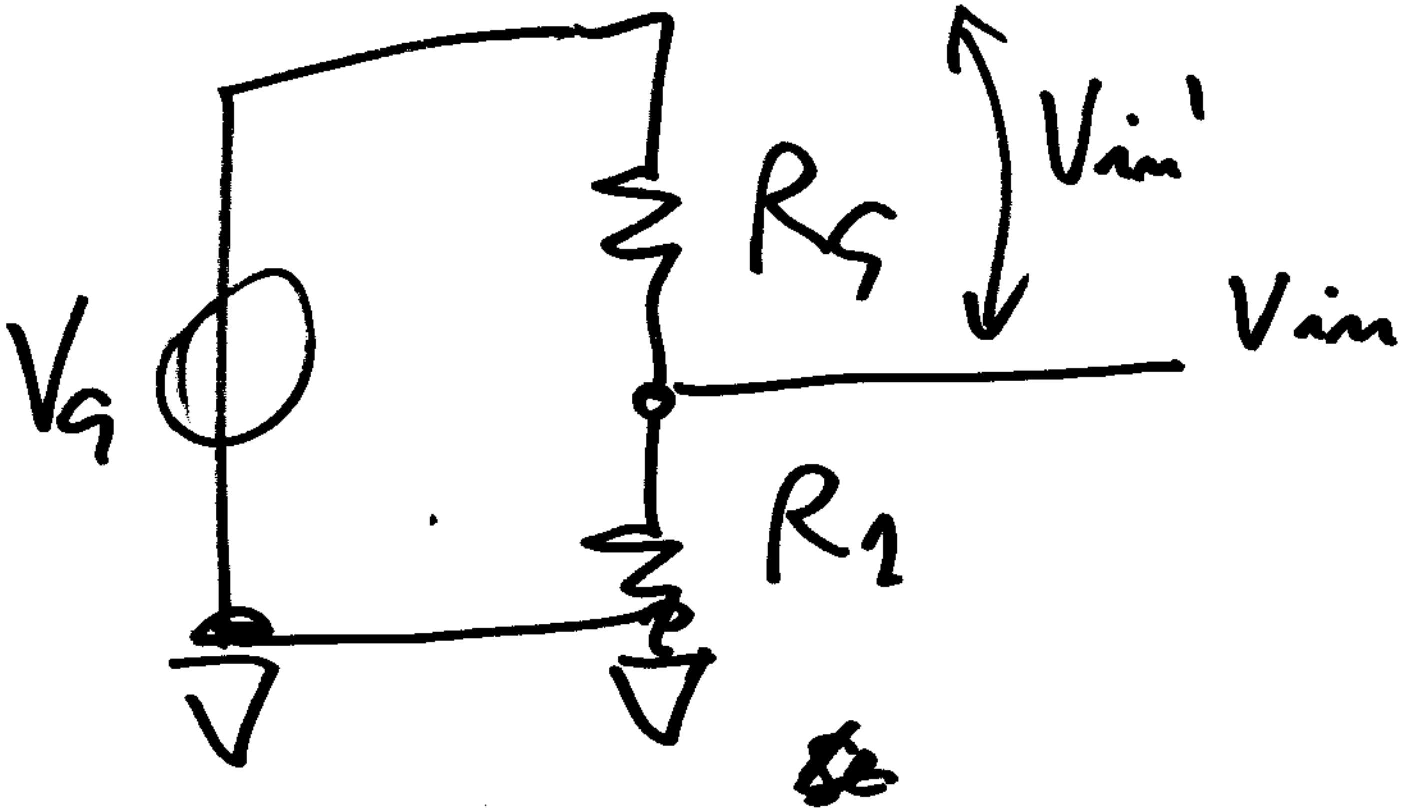
$$G = -\frac{R_2}{R_1}$$ Guadagno Amp. INV.



$$I = \frac{V_{in}}{R_1}$$

$$V_{OUT} = -R_2 I = -\frac{R_2}{R_1} V_{in}$$

G



$$V_{in} = \frac{R_1}{R_G + R_1} V_G$$

$$V_{in}' = \frac{R_G}{R_G + R_1} V_G$$

$$V_{in} + V_{in}' = V_G$$

V_G tensione continua (DC)

DATI	CALCOLATI	$(V_1/V_x)\|_{dB}$
$V_{in,1} = 1\,mV$	$V_{out,1} = -10\,mV$	0
$V_{in,2} = 3\,\mu V$	$V_{out,2} = -30\,\mu V$	50
$V_{in,3} = 2\,mV$	$V_{out,3} = -20\,mV$	114
$V_{in,4} = 0.4\,V$	$V_{out,4} = -4\,V$	-52

$$20 \log_{10}\left(\frac{V_1}{V_x}\right)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1\,mV}{3\,\mu V} = \frac{1000}{3} \cong 333$$

$$20 \log_{10}\left(\frac{1000}{3}\right) = 60\,dB - \underbrace{20 \underbrace{\log_{10}(3)}_{0{,}47 \;\sim 0{,}5}}_{10\,dB}$$

CALCOLATI $\quad (P_{1,out}/P_{x,out})|dB$

$P_{out,1} = 2\mu W = -27 dBm$	0
$P_{out,2} = 18 pW \cong -77 dBm$	50
$P_{out,3} = 8 aW = -141 dBm$	114
$P_{out,4} = 0.32 W = 320 mW = 4 \times 80 mW = +25 dBm$	-52

$$10 \log_{10}\left(\frac{P_1}{P_x}\right)$$

$$18\ pW \sim 2\times10^{-11}\ W = 2\times10^{-8}\ mW$$

$$10\log_{10}\left(2\times10^{-8}\right) \quad (dBm)$$

$+3\ dB \qquad -80\ dBm$

$-77\ dBm$