LEZ. 7 e 8

INC DI CATEGORIA B

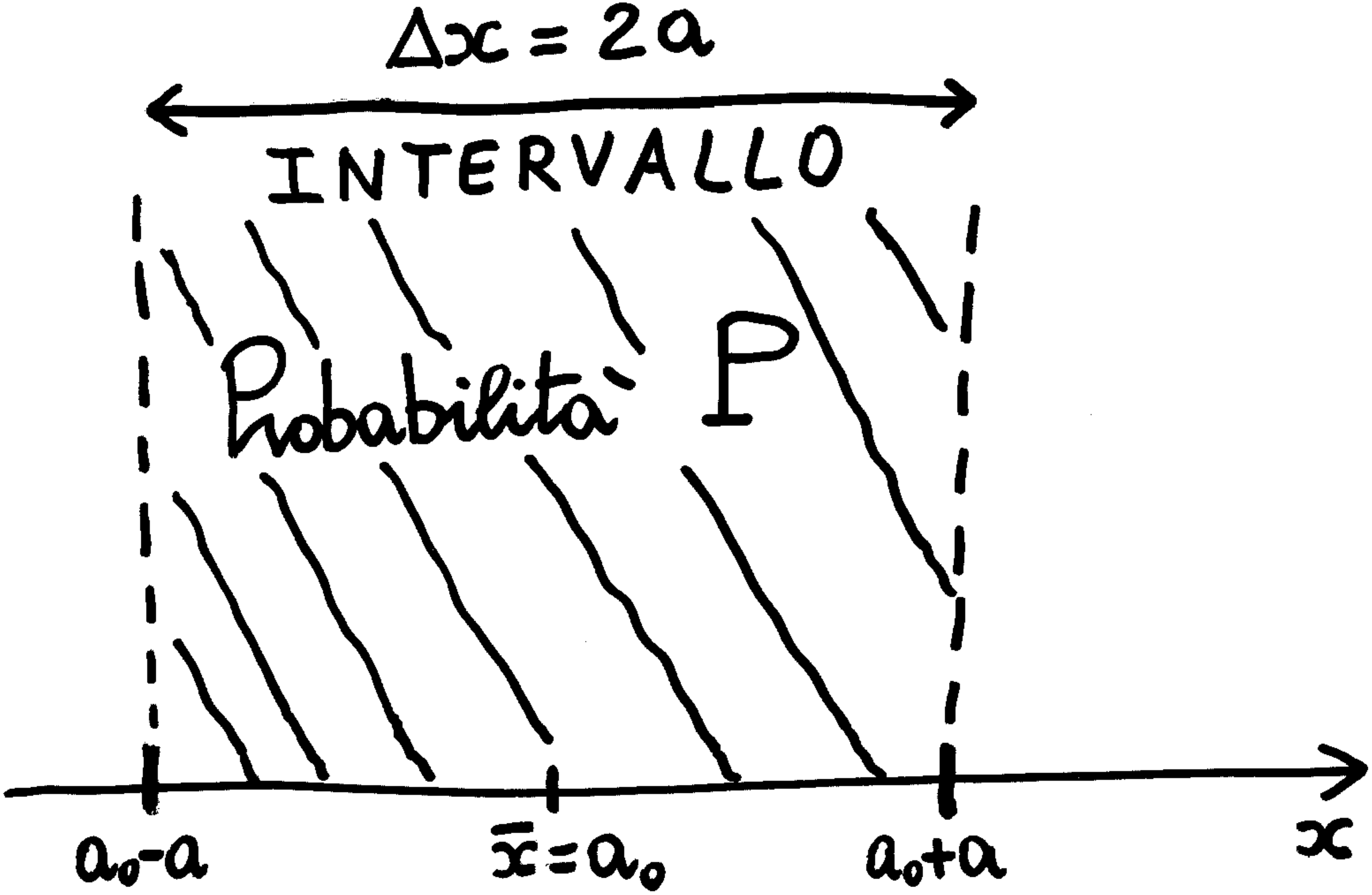
Si basa sulla definizione "a priori" di un opportuno intervallo di valori entro il quale si suppone debbano cadere i valori del misurando (con una data probabilità)

L'intervallo fissato è tipicamente centrato attorno al valor medio

$$\bar{x} = a_0 = \frac{(a_0+a)+(a_0-a)}{2}$$

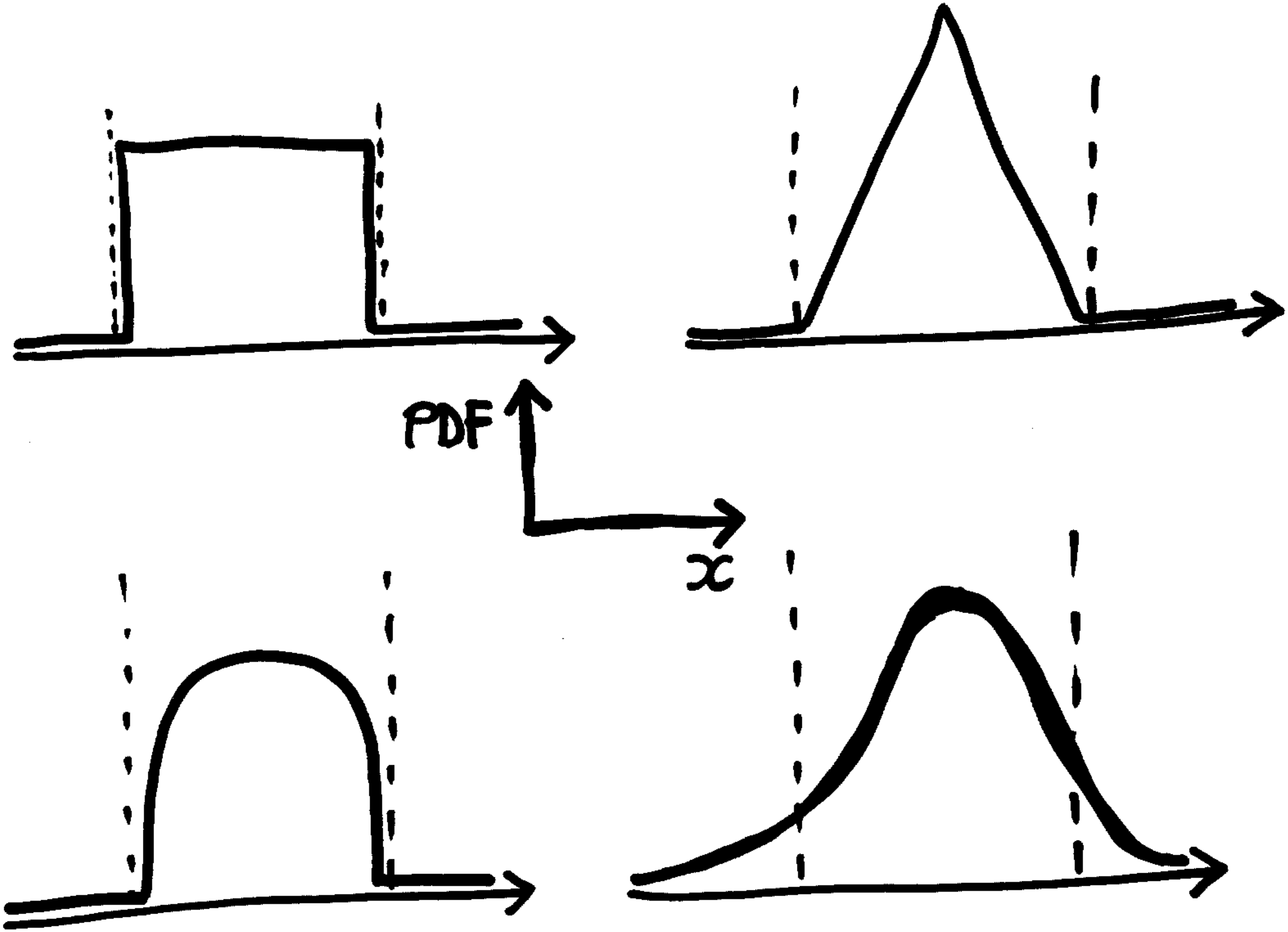
e ha una piena larghezza

$$\Delta x = (a_0+a)-(a_0-a) = 2a$$


$\Delta x = 2a$
INTERVALLO
Probabilità P
$a_0 - a$
$\bar{x} = a_0$
$a_0 + a$
x

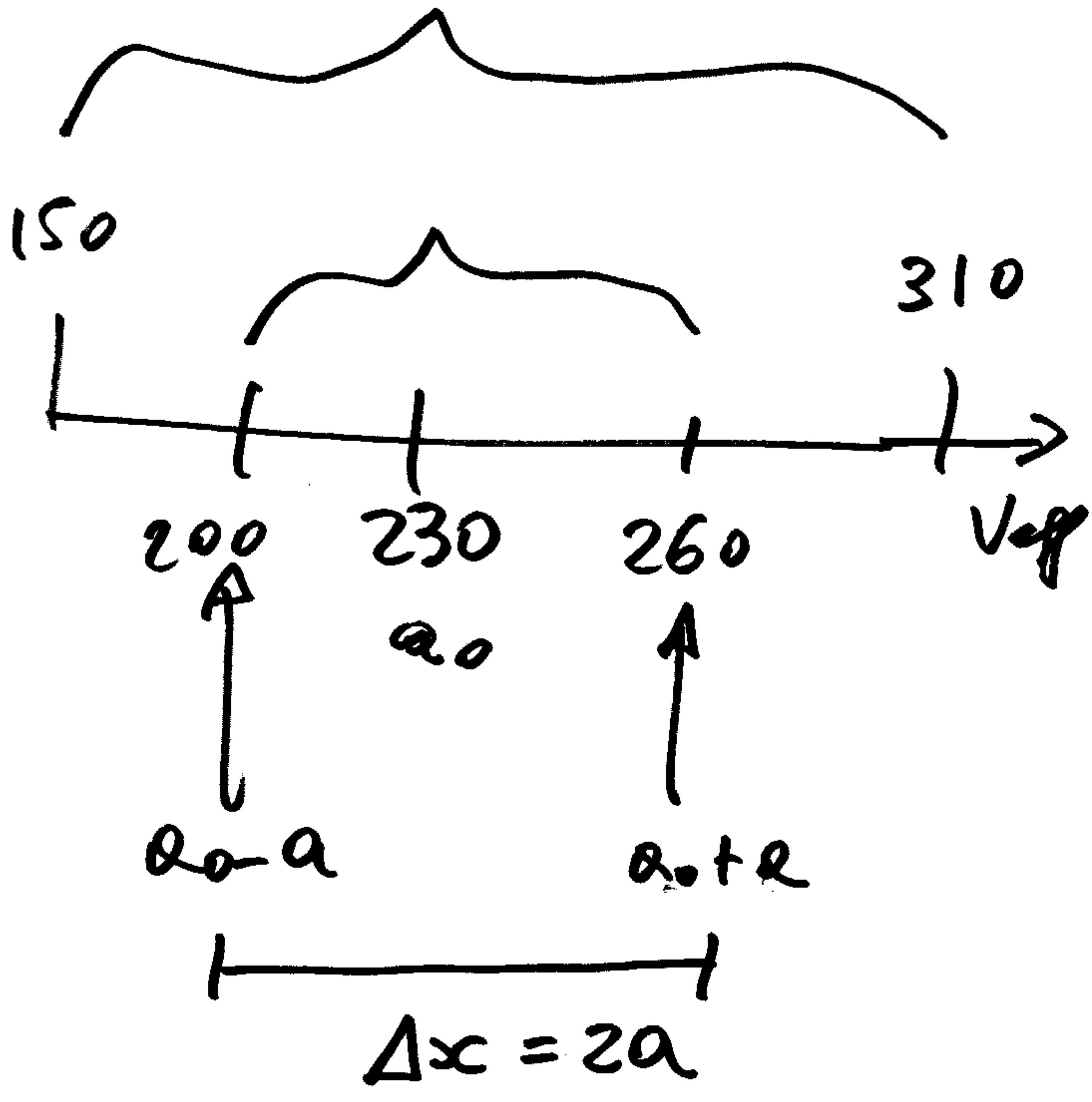
All'intervallo di Cat. B si associa una densità di probabilità (PDF) e di questa si calcolano media, varianza, e deviazione standard.

$\boxed{\text{intervallo}} \rightarrow \boxed{\text{PDF}} \rightarrow \boxed{\mu, \sigma}$


PDF
x

Tanto la larghezza dell'intervallo quanto la PDF a esso associata si scelgono sulla base di:

- precedenti conoscenze o dati di misura
- esperienza sul comportamento misurando
- specifiche dei costruttori dei materiali e strumenti coinvolti nella misura
- dati di calibrazioni o pubblicazioni
- incertezza sui parametri di riferimento (presa da manuali)


150
310
200
230
260
a_0
$a_0 - a$
$a_0 + a$
$\Delta x = 2a$

PROCEDURA DI STIMA DI $u_B(x)$

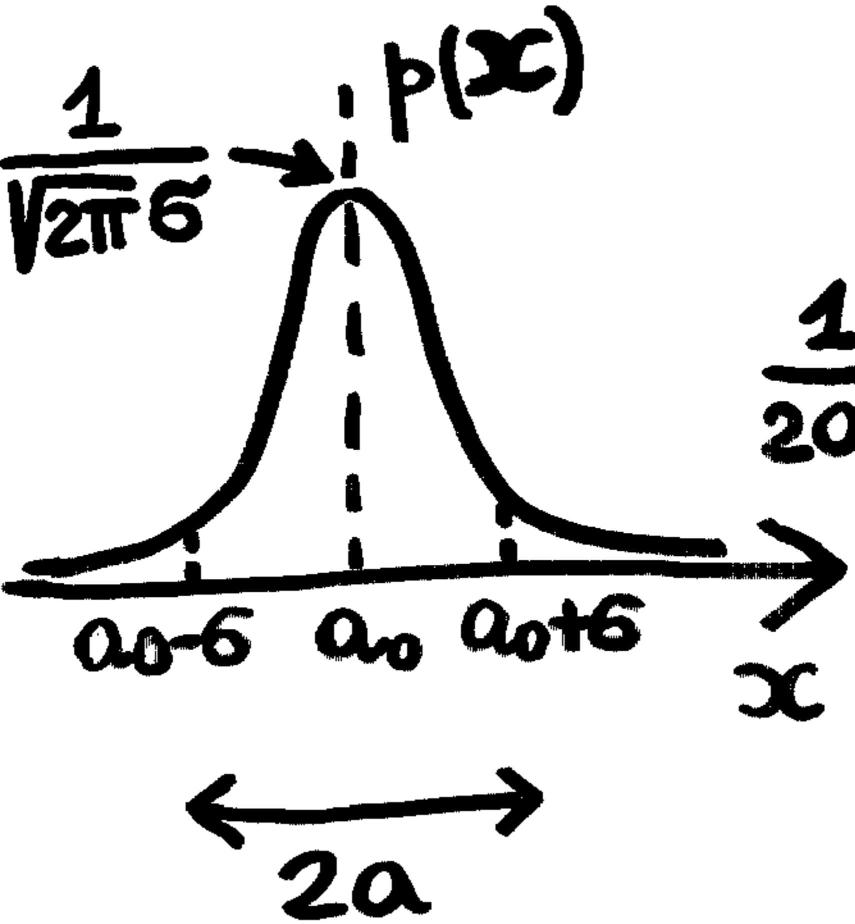
- Quando dispongo di una PDF per la grandezza x, posso calcolare $\mu(x)$ e $\sigma(x)$ che mi danno il valore di misura e la sua incertezza:

$$x = x_{MIS} = \bar{x} = \mu(x)$$

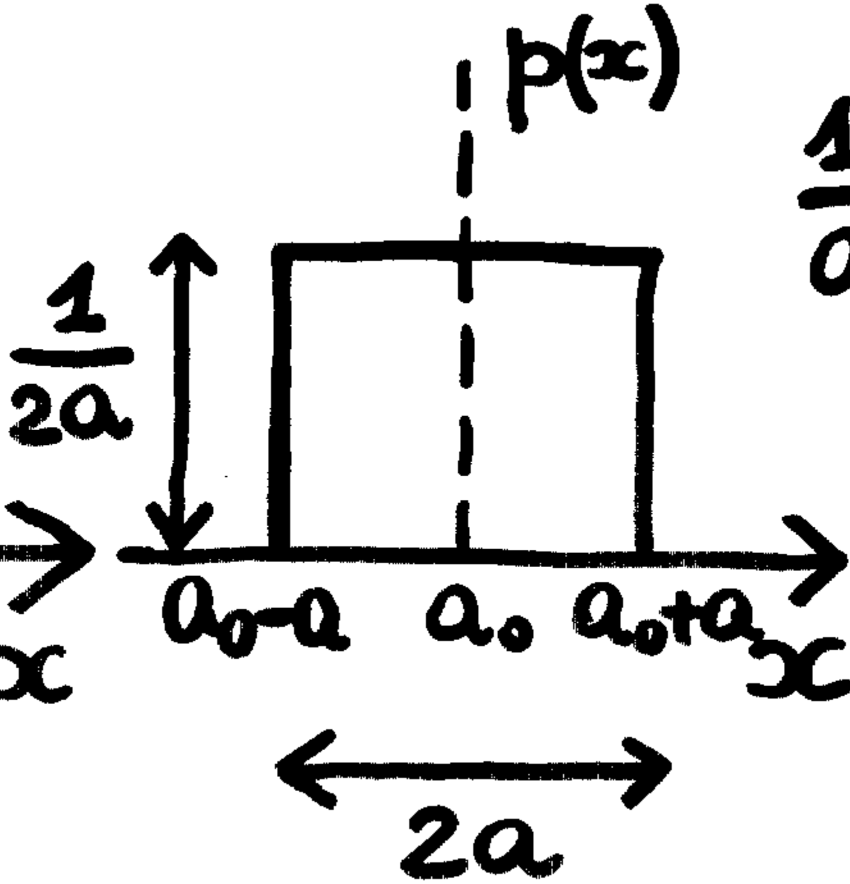
$$u_B(x) = INC_B(x) = \sigma(x)$$

PDF più comuni:

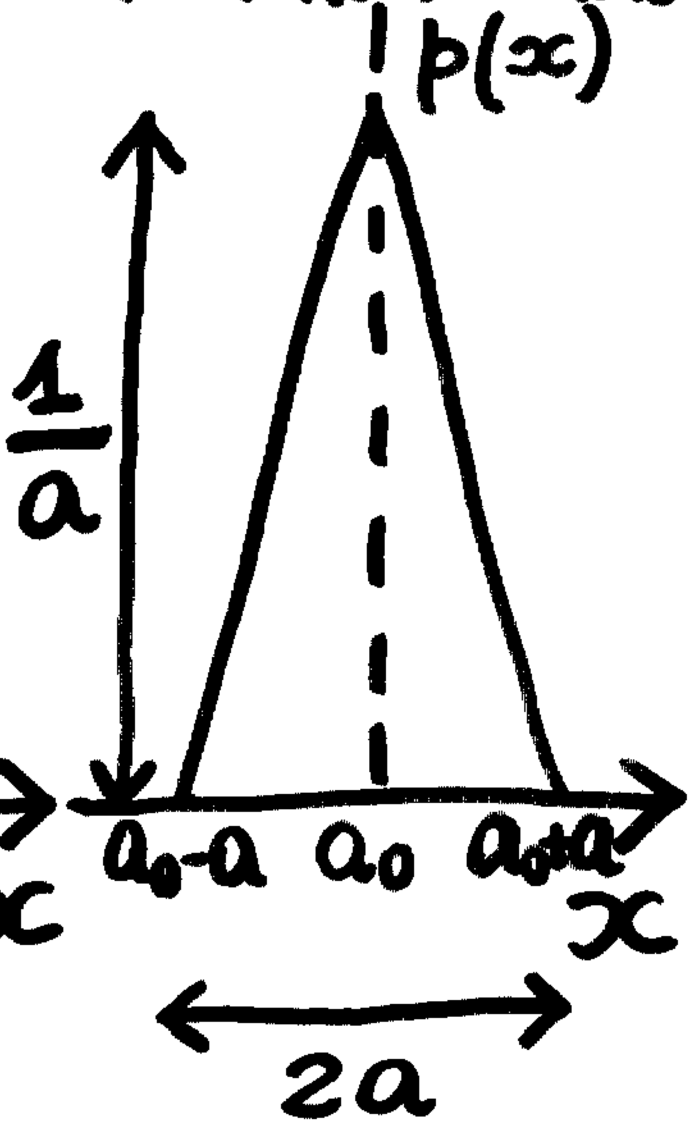
GAUSSIANA (NORMALE)



UNIFORME (RETTANGOLARE)



TRIANGOLARE



PDF normale

già dispongo di $\mu(x)$ e $\sigma(x)$

devo ricordare che

1σ level $\quad P[\mu-\sigma \leq x \leq \mu+\sigma] \cong 68.3\%$

2σ level $\quad P[\mu-2\sigma \leq x \leq \mu+2\sigma] \cong 95.5\%$

3σ level $\quad P[\mu-3\sigma \leq x \leq \mu+3\sigma] \cong 99.7\%$

PDF uniforme $\qquad \Delta x = 2a$

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x < a_0 - a \\ \frac{1}{2a} & a_0 - a \leq x \leq a_0 + a \\ 0 & x > a_0 + a \end{cases}$$

É immediato verificare che

$$\mu(x) = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)\, dx = a_0$$

$$\sigma(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}}$$

$$\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx = \int_{a_0-a}^{a_0+a} x \frac{1}{2a}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{a_0-a}^{a_0+a} = \frac{1}{2a}\, \frac{2a_0a + 2a_0a}{2} =$$

$$= a_0$$

$$\sigma^2(x) = E\left[\left(x-\mu(x)\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\mu(x)\right)^2 p(x)\,dx =$$

$$= \int_{a_0-a}^{a_0+a}\left(x-a_0\right)^2\frac{1}{2a}\,dx = \frac{1}{2a}\left[\frac{(x-a_0)^3}{3}\right]_{a_0-a}^{a_0+a} =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{a^3}{3}-\left(-\frac{a^3}{3}\right)\right] = \frac{a^2}{3} = \frac{(\Delta x)^2}{12}$$

$$\sigma(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}} \quad !!!$$

PDF triangolare

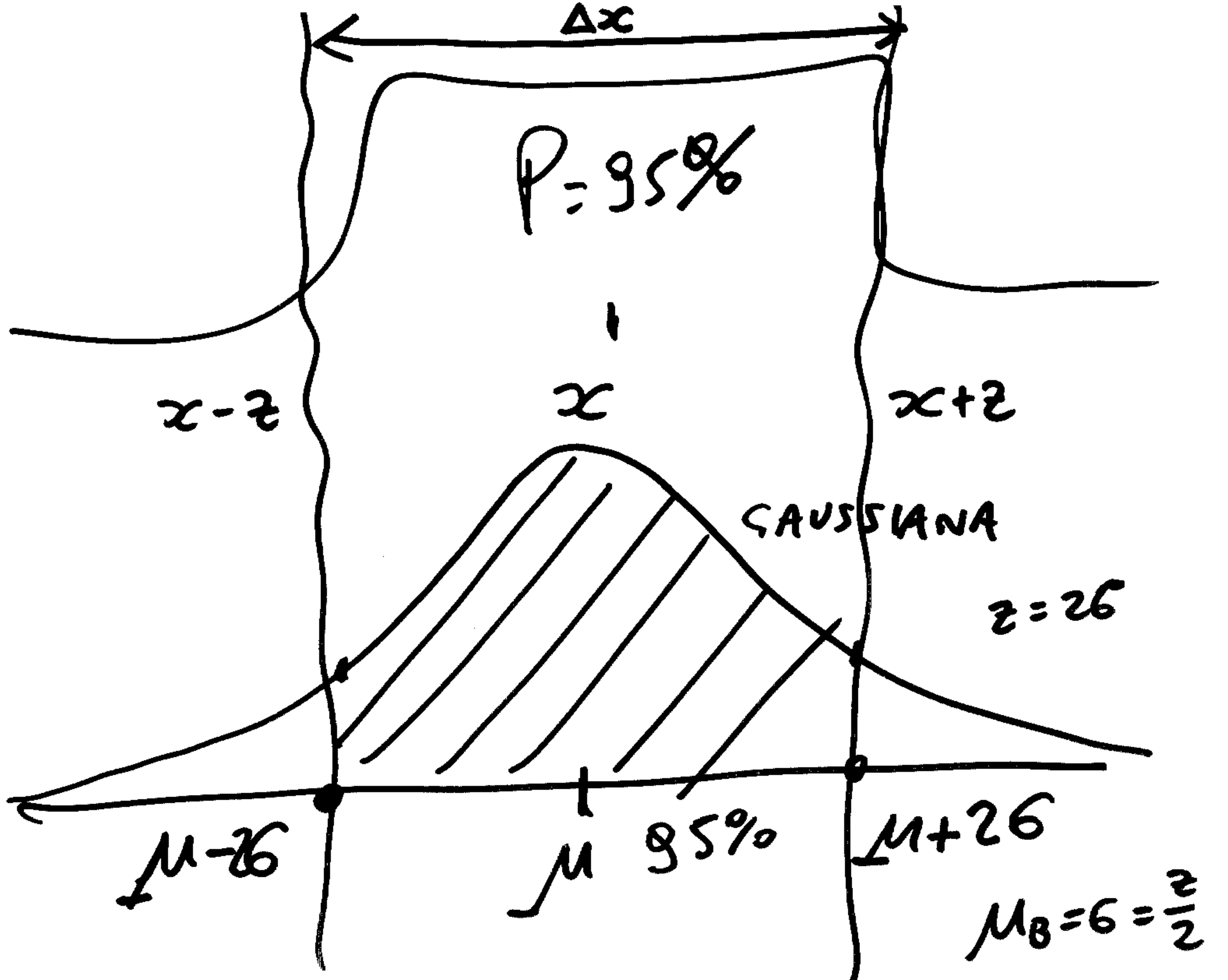
$$\mu(x) = a_0$$

$$\sigma^2(x) = \frac{a^2}{6} = \frac{(\Delta x)^2}{24}$$

$$\sigma(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{24}}$$

STIMA DI $\mu_B(x)$

- Calcolo μ_B partendo dalla conoscenza di un intervallo di confidenza con probabilita P: uso PDF normale con confidenza P e stimo $\mu_B = \sigma$
- Calcolo μ_B partendo dalla conoscenza di una INCERTEZZA ESTESA $U_B = K\mu_B$ e didividendo per il fattore K



Δx
$P = 95\%$
$x - z$
x
$x + z$
GAUSSIANA
$z = 2\sigma$
$\mu - 2\sigma$
μ
95%
$\mu + 2\sigma$
$\mu_B = \sigma = \frac{z}{2}$

MISURE DIRETTE

$y = x$ e.g. misura di V con un voltmetro

$$\mu_C^2 = \mu_A^2 + \mu_B^2$$

MISURE INDIRETTE

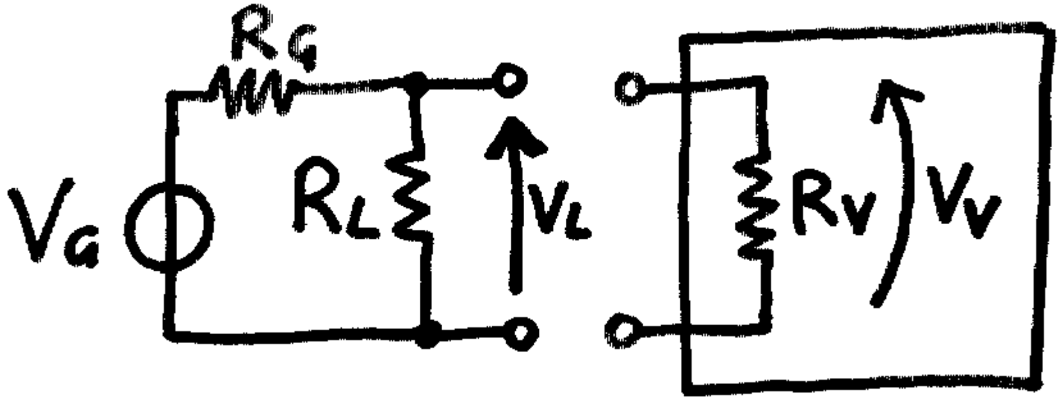
$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e.g. mis. P

$$P = f(I, R_0, \alpha, T) = R I^2 = R_0\left[1+\alpha(T-T_0)\right] I^2$$

MISURE DIRETTE

ERRORE DI CARICO

effetto di carico dello strumento sul misurando



VOLTMETRO

$$V_L = \frac{R_L}{R_L + R_G} V_G$$

$$V_V = V_L' = \frac{R_L /\!/ R_V}{R_L /\!/ R_V + R_G} V_G \neq V_L$$

MISURE INDIRETTE

ERRORE DI MODELLO (più raffinato e completo)

$$P = RI^2 = R_0 \left[1 + \alpha (T - T_0)\right] I^2$$

$$P' = R_0 \left[1 + \alpha (T - T_0) + \beta (T - T_0)^2 + \gamma (T - T_0)^3 + \ldots\right] I^2$$

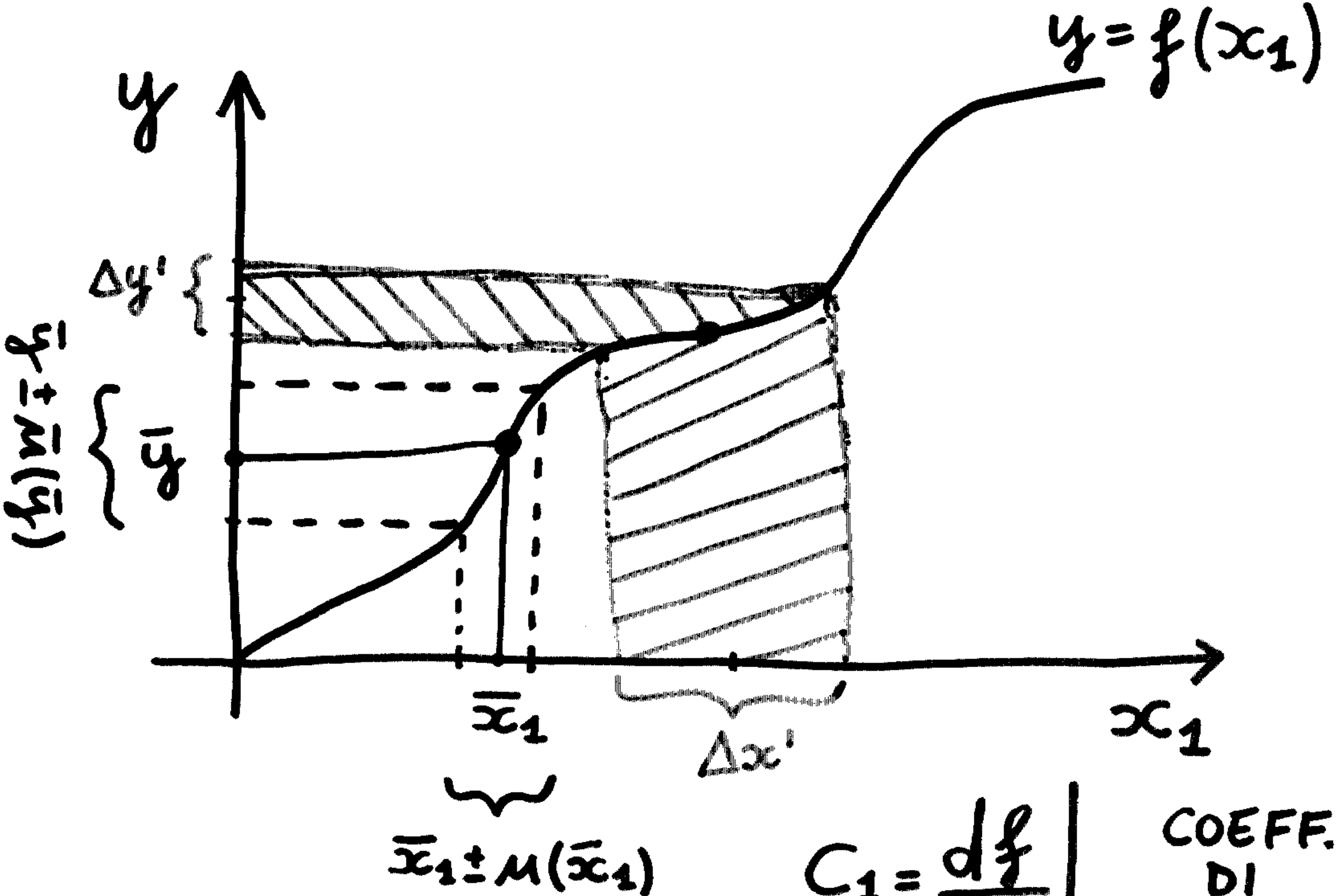
$$P'' = R_0 f(p, U\%) \left[1 + \alpha (T - T_0) + \beta (T - T_0)^2 + \gamma (T - T_0)^3 + \ldots\right] I^2$$

INC COMPOSTA M_c IN MIS. IND.

In un intorno del valore di m.

$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N)$ posso sviluppare in serie di Taylor la relazione funzionale f:

$$(y-\bar{y}) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{y}} (x_1-\bar{x}_1) + \ldots \left.\frac{\partial f}{\partial x_N}\right|_{\bar{y}} (x_N-\bar{x}_N)$$



$$C_1 = \left.\frac{df}{dx_1}\right|_{\bar{x}_1}$$ COEFF. DI SENS.

$$E\left\{(y-\bar{y})^2\right\} = E\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j)\right\} =$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{y}}\right]^2 (x_i-\bar{x}_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{y}}\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{\bar{y}}(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j)\right\}$$

$$E\left\{(x_i-\bar{x}_i)^2\right\} \triangleq \sigma^2(x_i) = \mu^2(x_i)$$ VARIANZA o INCERTEZZA^2

$$E\left\{(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j)\right\} \triangleq \sigma^2(x_i,x_j) = \mu(x_i,x_j)$$ COVARIANZA tra x_i e x_j

Definiamo COEFFICENTI DI SENSIBILITA'

$$c_i \triangleq \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{y}}$$

le derivate prime parziali della relazione funzionale rispetto alla variabile x_i

C_i indica come varia il misurando Y in corrispondenza di una variazione del parametro X_i di dipendenza

Il VALORE DI MISURA della grandezza Y è

$$y = \bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)$$

con una INCERTEZZA COMPOSTA

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i, x_j)}$$

In generale ogni INCERTEZZA $u(x_i)$ è

$$u_c(x_i) = \sqrt{u_A^2(x_i) + u_B^2(x_i)} = \sqrt{s^2(\bar{x}_i) + u_B^2(x_i)} = \sqrt{\frac{s^2(x_i)}{n} + u_B^2(x_i)}$$

INC. COMPOSTA DELLA MISURA INDIRETTA

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right] u(x_i, x_j)$$

Somma "pesata" delle incertezze (varianze) delle x_i più la somma dei termini di covarianza (sempre pesate con le derivate prime della relazione funzionale)

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

$$r_{ij}(x_i, x_j) \triangleq \frac{\mu(x_i, x_j)}{\mu(x_i)\,\mu(x_j)} \in [-1, +1]$$

$r_{ij} = 0 \Longleftarrow x_i$ e x_j STATISTICAMENTE INDIPENDENTI

Utilizzando la def. di r_{ij}, si può scrivere

$$\mu_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 \mu^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j\, r_{ij}(x_i, x_j) \times \mu(x_i)\,\mu(x_j)}$$