

ISTITUTO DI MATEMATICA
DEL POLITECNICO DI MILANO

Pubblicazione N. 410

ENZO TONTI

**Introduzione
alla meccanica quantistica**

Estratto da *"Industria Italiana Elettrotecnica ed Elettronica,"*
Milano - 1965

MILANO
Anno 1965

INTRODUZIONE

ALLA MECCANICA QUANTISTICA

SOMMARIO

Questo articolo vuole dare una idea della meccanica del mondo atomico. Il nome di *meccanica quantistica* con la quale si designa trae la sua origine da uno dei fatti fondamentali rivelati dagli esperimenti: la quantizzazione delle grandezze fisiche, in special modo dell'energia. Essa prende anche il nome di *meccanica ondulatoria*: l'origine di questa denominazione è dovuto ad un altro aspetto fondamentale delle particelle atomiche costituito dal

fatto che in alcune esperienze danno luogo a fenomeni tipici delle onde. Trattandosi di concetti interamente diversi da quelli che ci sono familiari, l'autore non presume di essere riuscito a condensarli con la dovuta chiarezza nel breve spazio di un articolo: dal canto suo il lettore non deve perdersi d'animo di fronte alle novità e al grado di astrazione che la parte matematica della teoria richiede.

L'articolo si divide in due parti: la prima mostra i principali *fatti sperimentali* del mondo atomico che non trovano spiegazioni con le leggi e i concetti della fisica classica e

mette in rilievo i concetti che scaturiscono da questi fatti sperimentali; la seconda parte espone succintamente la *teoria* che è stata costruita per descrivere razionalmente il comportamento dei sistemi atomici mostrandone i concetti che la informano e l'apparato matematico di cui si serve. Innumerevoli e delicate verifiche sperimentali sono state fatte di questa teoria da quarant'anni a questa parte: l'accordo si è sempre mostrato perfetto. Essa costituisce la chiave con la quale oggi si comprendono, si prevedono e si dominano i fenomeni del mondo atomico.

LA MECCANICA CLASSICA

Passiamo brevemente in rassegna i metodi che la meccanica classica ci fornisce per lo studio del moto di una particella e di un generico sistema di corpi. Si tratta di quattro procedimenti equivalenti, quanto ai risultati, diversi per l'impostazione e la difficoltà. Ognuno di questi quattro metodi è particolarmente indicato per un certo genere di problemi e meno per altri. Essi sono:

- 1 - il metodo di Newton
- 2 - il metodo di Lagrange
- 3 - il metodo di Hamilton
- 4 - il metodo di Hamilton-Jacobi.

Probabilmente il lettore non conoscerà alcuni di questi metodi: nè tentiamo, per mancanza di spazio, di descriverli anche sommariamente. Per il nostro scopo è sufficiente sapere che esistono, e conoscerne in sintesi le principali caratteristiche.

A questo serve lo schema di fianco riportato.

Il metodo di Hamilton è particolarmente indicato per lo studio del moto perturbato di un moto stazionario ed è fondamentale per lo studio della meccanica di un insieme di particelle (meccanica statistica).

TABELLA I

	Newton (una particella)	Lagrange	Hamilton	Hamilton-Jacobi
coordinate	q^1, q^2, q^3	q^1, q^2, q^3	q^1, q^2, q^3 p_1, p_2, p_3	q^1, q^2, q^3
condizioni iniziali	$q^1(0), \dots$ $\dot{q}^1(0), \dots$	$q^1(0), \dots$ $\dot{q}^1(0), \dots$	$q^1(0), \dots$ $p_1(0), \dots$	$q^1(0), \dots$ $\dot{q}^1(0), \dots$
funzione	$\vec{F}(q, \dot{q}, t)$ nota	$L(q, \dot{q}, t)$ nota	$H(q, p, t)$ nota	$S(q, t)$ incognita
fondament. equazione	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0$	$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$ $\dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q^k}$	$H(q, \frac{\partial q}{\partial t}, t) + V = \frac{\partial S}{\partial t}$
tipo di equazione	tre equazioni differ. ordin. II ordine	tre equazioni differ. ordin. II ordine	sei equazioni differ. ordin. I ordine	una equaz. differ. parziale I ordine non lineare
risultato	$q^1(t), \dots$	$q^1(t), \dots$	$q^1(t), \dots$ $p_1(t), \dots$	$S(q, c, t)$ da cui $q^1(t), q^2(t), q^3(t)$

Inoltre per la particolare importanza che attribuisce alle quantità di moto (le p) esso è un punto di partenza per l'istituzione della meccanica quantistica (metodo di Heisenberg) dove, come vedremo, le quantità di moto sono più importanti delle velocità.

Il metodo di Hamilton-Jacobi si differenzia sostanzialmente dagli altri tre precedenti perchè l'incognita è costituita da una *funzione delle coordinate libere* e quindi, l'equazione di moto è alle *derivate parziali*. Questo metodo trova utile applicazione nell'astronomia e, oltre al fascino concettuale in esso racchiuso, offre un punto di partenza per l'istituzione della meccanica quantistica (metodo di Schrödinger).

E da notare che il moto dell'intero sistema (in particolare di una particella) è completamente contenuto nell'unica funzione S dalla quale si ricavano le equazioni di moto, la traiettoria, le componenti della quantità di moto, l'energia ecc.

Vedremo che la meccanica quantistica traendo lo spunto da questo metodo, caratterizza lo stato di un sistema atomico mediante una funzione ψ che, ricavata sistema per sistema risolvendo una equazione differenziale (di Schrödinger), contiene in sé tutte le informazioni sul moto del sistema atomico.

La conoscenza di questi metodi, pur non essendo indispensabile per la comprensione della meccanica quantistica, è certamente consigliabile per facilitarne la comprensione.

I FATTI SPERIMENTALI

Una teoria della fisica è una costruzione logica del pensiero che si propone di coordinare razionalmente un gruppo di fatti sperimentali.

Il valore di una teoria fisica sta in gran parte nella sua capacità di *prevedere* il comportamento di un sistema in evoluzione quando siano date le cause e sia noto lo stato iniziale; nella sua *coerenza* interna, nella sua *semplicità*, *generalità* e nel fatto che tutt'intera discenda logicamente dal *minor numero* possibile di postulati. Le applicazioni pratiche sono possibili solo quando si è compreso il meccanismo dei fatti sperimentali: e per questo è necessario conoscere i concetti e le leggi per poter prevedere.

La dinamica è la teoria del movimento dei corpi. Il suo scopo in particolare è di fornirci le leggi del movimento, i loro limiti di validità, i diversi metodi per lo studio del moto e le loro condizioni di applicabilità. Ma i principi su cui si fonda, da dove vengono? Le leggi a cui perviene, dove trovano conferma? I principi sono indotti dai fatti sperimentali, le leggi sono confrontate con i fatti sperimentali. È l'accordo con i fatti sperimentali che mantiene in vita ogni teoria fisica, che ne indica i limiti di validità che ne impone il suo sorgere e ne decreta il suo tramontare.

CRISI DELLA MECCANICA CLASSICA NEL MONDO ATOMICO

Ebbene sono stati i fatti sperimentali a mostrare che la meccanica classica *non è applicabile* al moto di particelle di dimensioni atomiche (al disotto di 10^{-8} m circa).

In altre parole la descrizione del movimento di un sistema atomico mediante la meccanica classica è spesso in completo disaccordo con i fatti sperimentali e gli stessi *concetti* su cui è fondata non ci rendono in alcun modo ragione dei fenomeni che avvengono nel mondo atomico.

I documenti che possiamo esibire sono lastre fotografiche: ci limitiamo ai fenomeni più rappresentativi.

Il fatto consiste nella presenza di intense righe di emissione in corrispondenza a determinate frequenze, ciò implica che gli atomi della sostanza concentrano la loro emissione su quelle frequenze, oltre beninteso, a distribuirne anche una parte su tutte le altre frequenze (spettro continuo).

La fig. 2 mostra anelli di diffrazione prodotti (si ponga attenzione) da un fascio di elettroni! che incidono su un reticolo cristallino. Questo vuol dire che un fascio di elettroni si comporta in questa esperienza in modo simile ad un'onda per la quale i fenomeni di interferenza ci sono ben noti. Il fenomeno si osserva con facilità nel microscopio elettronico.

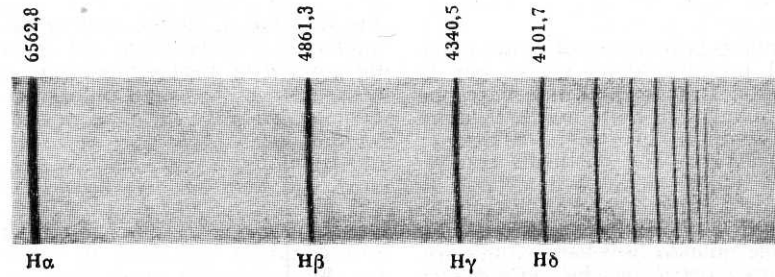


FIG. 1 - Sono le solite righe di uno spettro di emissione. Qui ci vogliamo però soffermare sul fatto che la esistenza e la regolarità di queste frequenze di intensa emissione non sono comprensibili con le leggi della fisica classica.

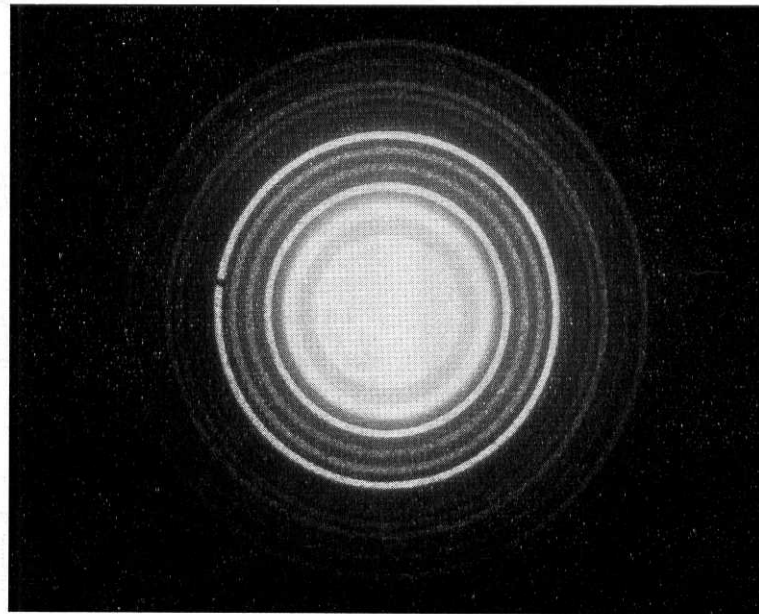


FIG. 2 - Questa fotografia potrebbe passare inosservata perchè ci sembra familiare. Ma no! essa non è prodotta dalla luce, ma bensì da un fascio di elettroni lanciato contro un foro fatto dagli atomi di un reticolo cristallino. E gli elettroni sono delle particelle!

La figura 1 mostra lo spettro di righe emesso da una sostanza portata all'incandescenza, come lo si può osservare con un comune spettroscopio.

Ambedue i fenomeni, esistenza di valori discreti delle frequenze comportamento «ondulatorio» delle particelle sono assolutamente inspiegabili con la meccanica classica. L'e-

same di questi e altri fatti sperimentali porta a concludere che « il fallimento della meccanica classica non è dovuto ad inaccuratezza delle leggi del moto, ma ad una vera e propria incapacità dei suoi concetti a fornirci una descrizione, degli eventi atomici (Dr 4) (*) ».

La diffrazione degli elettroni è un fenomeno che non ha l'analogo nel macrocosmo dove siamo abituati a vedere la diffrazione della luce, delle onde sonore, ma non certo di un fascio di particelle! È naturale chiedersi: che relazione c'è tra la velocità delle particelle e la lunghezza d'onda λ deducibile dalla distanza degli anelli di diffrazione? Le misure eseguite mostrano che vale la semplicissima relazione

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

essendo p la quantità di moto, uguale al prodotto della massa per la velocità. È essenziale osservare che è la quantità di moto non la velocità che compare in questa relazione: ciò vuol dire che particelle con velocità diversa possono dar luogo alla stessa lunghezza d'onda, purché la massa sia in proporzione più grande quando la velocità è minore. Questo mostra già che nella descrizione della meccanica atomica ha più importanza la quantità di moto che non la velocità.

La costante di proporzionalità h il cui valore sperimentale è $6,6 \cdot 10^{-34}$ j.s ha le dimensioni di una azione (che è il prodotto di una energia per un tempo) e prende il nome di quanto di azione o costante di Planck. Essa è una costante universale, come lo sono la costante dei gas R , la costante di Boltzmann k ; la velocità della luce nel vuoto c , la costante di gravitazione universale G , la carica elettrica delle particelle elementari e , ecc.

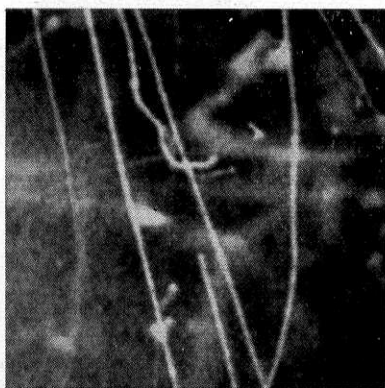


FIG. 3 - Un elettrone che si trovava fermo investito da un'onda elettromagnetica viene messo in moto e l'onda deviata ha una frequenza minore: come se l'elettrone fosse stato urtato da una particella. Nell'urto si ha la conservazione della energia e della quantità di moto.

(*) - Le sigle fra parentesi indicano il nome dell'autore e la pagina del libro citato in fondo all'articolo.

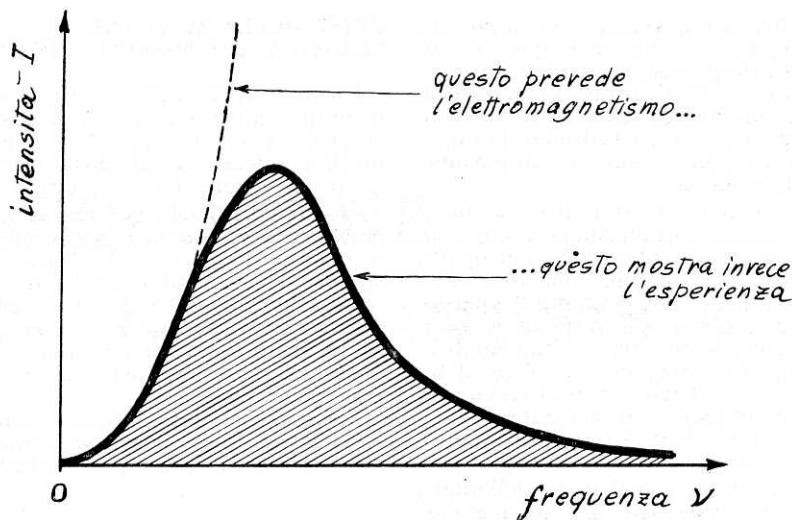


FIG. 4 - Questa figura mostra la spettacolare discrepanza tra l'elettromagnetismo e l'esperienza nel descrivere la distribuzione di energia emessa da un corpo incandescente di potere assorbente unitario (corpo nero).

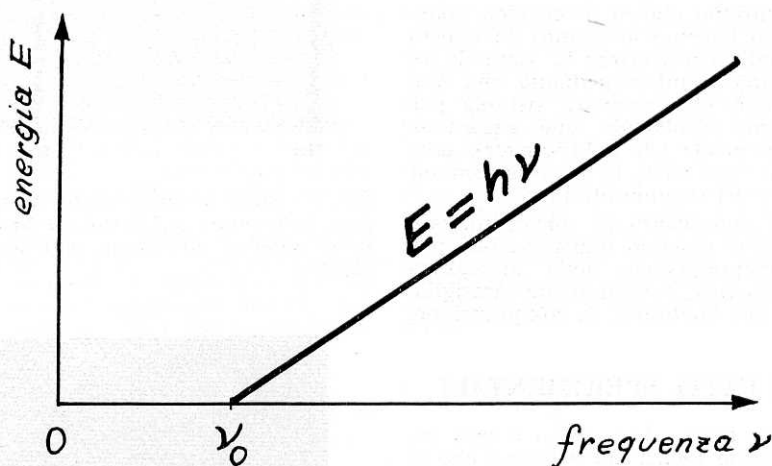


FIG. 5 - Questa legge è semplicissima: l'energia di un elettrone emesso è proporzionale alla frequenza della luce incidente. L'elettromagnetismo è incapace di dirci il perché.

La descrizione dei fenomeni atomici richiede perciò una nuova teoria del movimento: questa è la meccanica quantistica.

CRISI DELL'ELETTROMAGNETISMO

È stato constatato che in certe esperienze le onde elettromagnetiche (in particolare le onde luminose, ultraviolette, i raggi X, i raggi γ) si comportano come un fascio di particelle (esattamente l'opposto di quello che capitava per le particelle che in certe esperienze si comportavano come le onde!) con tanto di energia, di quantità, di moto e come tali soggette alle leggi della meccanica relativistica (con una certa approssimazione anche a quella classica).

I documenti che scegliamo, fra i numerosi sono tre. La fig. 3 mostra l'effetto Compton (la fotografia è fatta nella camera di Wilson) con-

sistente nell'urto di una radiazione X con un elettrone che si trovava a riposo: l'urto ha luogo come se si trattasse di due particelle, e non di una particella (l'elettrone) e una radiazione elettromagnetica.

La più semplice interpretazione che si può dare è che la radiazione sia costituita di particelle, detti quanti di luce o « fotoni » la cui quantità di moto, come si rileva dalle misure sperimentali è legata alla lunghezza d'onda della radiazione con la formula

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

proprio la stessa che esprimeva la relazione tra un corpuscolo e l'onda associata! Non desta meraviglia questa coincidenza?

La fig. 4 illustra il netto fallimento dell'elettromagnetismo nel descrivere la legge di emissione dell'energia elettromagnetica, in fun-

zione delle frequenze di un corpo portato all'incandescenza, il cui potere assorbente sia unitario.

Mentre la quantità di energia emessa in ogni intervallo di frequenza dv è nulla a frequenza zero e dopo un massimo va riducendosi di nuovo a zero per frequenze grandi, l'elettromagnetismo prevede che tale emissione vada aumentando con il quadrato delle frequenze. Ciò porta in particolare alla paradossale conclusione che l'energia totale irradiata dal corpo incandescente sia infinita, mentre fisicamente è ovvio che l'ammontare di energia emessa su tutte le frequenze non possa che avere un valore finito, come infatti indica l'esperienza (l'energia totale in figura è proporzionale all'area tratteggiata).

La figura 5 illustra la legge dell'effetto fotoelettrico. Tale effetto consiste nella liberazione di elettroni da una superficie metallica colpita da raggi ultravioletti o X: è un fenomeno reso comune dall'esposimetro della macchina fotografica. Questo fenomeno può essere facilmente interpretato, come ha fatto Einstein ammettendo che la radiazione elettromagnetica si propaghi in unità elementari (i fotoni) di energia $E=h\nu$.

Mentre l'elettromagnetismo prevede che l'emissione di elettroni non dipenda dalla frequenza ma dalla intensità della radiazione, i fatti sperimentali mostrano che invece l'emissione non dipende dalla intensità (questa se mai determina il numero di elettroni liberati) ma dipende dalla frequenza ed esiste un limite inferiore della frequenza (ν_0 in figura) caratteristica del metallo al di sotto del quale non si ha emissione, comunque intensa sia la radiazione.

Questi ed altri fenomeni impongono una nuova teoria dell'elettromagnetismo applicabile ai fenomeni atomici e che abbia come limite l'elettromagnetismo classico la cui validità è incontestata nel macrocosmo: è così nata l'elettrodinamica quantistica.

I fatti sperimentali ci mettono quindi di fronte al fatto che un'onda elettromagnetica in alcuni fenomeni si manifesti come associata ad un fascio di corpuscoli (i fotoni) e all'opposto al fatto che un fascio di particelle (neutroni, elettroni, ecc.) si manifesti in alcune esperienze come dotata di proprietà tipiche delle onde: interferenza, diffrazione. Questa reciprocità di comportamento prende il nome di « dualità onda-corpuscolo ».

I NUOVI CONCETTI CHE NE SCATURISCONO

Abbiamo passato in rassegna i fatti riguardanti il mondo atomico e l'elettromagnetismo perchè questi campi hanno parecchi legami che li uniscono.

Ci limiteremo d'ora in avanti alla sola meccanica quantistica. L'esame approfondito di numerosi fatti sperimentali del mondo atomico ha

portato a stabilire i seguenti concetti e principi di cui ogni teoria del mondo atomico dovrà renderci ragione:

Quantizzazione. Nel mondo atomico vige la quantizzazione delle grandezze fisiche: precisamente le misure ci rivelano che una grandezza osservabile è suscettibile di assumere solo alcuni valori possibili che formano un insieme discreto. Così ad esempio si ha per l'energia (spettro righe, oscillatori di Planck per la radiazione del corpo nero, esperienza di Frank e Hertz) e per il momento angolare (quantizzazione spaziale del momento angolare orbitale, quantizzazione dello spin nella esperienza di Stern e Gherlach).

Dualità onda-corpuscolo. Un fascio di particelle manifesta in certe esperienze un comportamento simile a quello delle onde dando luogo a fenomeni di interferenza quando urta contro un reticolo sufficientemente fine (reticolo formato dagli atomi di un cristallo) come nell'esperienza di Davisson e Germer e a fenomeni di diffrazione come si vede comunemente con un microscopio elettronico. Al contrario la luce manifesta in certe esperienze un aspetto corpuscolare comportandosi come costituita di particelle (dette fotoni) come nell'effetto fotoelettrico e nell'effetto Compton.

L'esperienza mostra che il raccordo tra grandezze tipiche di un corpuscolo (energia, quantità di moto, ecc) e quelle tipiche di un'onda (frequenza, lunghezza d'onda, ecc) è effettuato mediante le formule

$$E = h\nu \quad \rightarrow \quad \frac{h}{p} = \frac{h}{n} = \frac{h}{\lambda}$$

essendo n la normale al fronte d'onda. La teoria della relatività ristretta mostra che l'una formula comporta necessariamente l'altra. Ma di che tipo di onde si tratta? Per i « fotoni » l'onda associata è quella elettromagnetica, ma per le particelle materiali (elettroni, neutroni, ecc) la natura dell'onda associata la chiariremo più tardi.

Principio di complementarità. Ogni apparato sperimentale creato per mettere in evidenza l'aspetto ondulatorio di una particella ne nasconde automaticamente l'aspetto corpuscolare e viceversa. In altre parole è impossibile constatare simultaneamente i due aspetti di una particella: essi si escludono a vicenda. Si dice che sono *complementari*.

Principio di indeterminazione. È facile rendersi conto con semplici esperimenti concettuali, con esperimenti cioè che rispettano tutti i principi fisici conosciuti e che per il fatto che sono solo pensati ci evitano gli immancabili errori sperimentali di ogni misurazione, che indipendentemente dalla perfezione degli strumenti esiste un limite di precisione nella determinazione della posizione e della quantità di moto di una particella atomica. Questo limite di precisione è dovuto a ragio-

ni di principio, principalmente all'aspetto ondulatorio delle particelle e a quello corpuscolare della radiazione e nessun esperimento presente o futuro potrà mai oltrepassarlo.

È estremamente istruttivo esaminare qualcuno di questi esperimenti concettuali: ad esempio l'osservazione della posizione di un elettrone con un microscopio. Il limitato potere separatore del microscopio dovuto alla diffrazione della luce, (ineliminabile di principio) e l'aspetto corpuscolare della radiazione (effetto Compton) portano alla conclusione che la precisione con cui si può localizzare l'ascissa dell'elettrone e quella con cui si può misurare la componente della sua quantità di moto sull'asse x sono inversamente proporzionali: maggiore è la precisione dell'una e minore è quella dell'altra. Il prodotto delle due imprecisioni è superiore o uguale al più alla costante di Planck:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h$$

Se si ricorda che $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ j.s si vede quanto sia ben lontano dalle misure quotidiane un simile limite! Ma poichè si tratta di una limitazione di principio, essa esprime una impossibilità *concettuale* di conoscere con precisione assoluta la posizione e la quantità di moto di una particella simultaneamente. Se si pone mente al fatto che in meccanica la descrizione del moto di una particella richiede la conoscenza della posizione e della velocità nell'istante iniziale (o che è lo stesso della quantità di moto) si vede quale disastrosa conseguenza abbia l'indeterminazione su accennata per la precisa descrizione del moto di una particella. Ne dobbiamo dedurre che nella meccanica atomica è di principio impossibile descrivere esattamente il moto di una particella, parlare di equazioni di movimento, quindi di traiettoria (che otterremmo eliminando il tempo tra queste ultime) di posizione precisa di una particella in un certo istante e così via. Questo principio di indeterminazione di Heisenberg può naturalmente essere constatato su altre esperienze concettuali e si scopre, come implicito in ciò che abbiamo detto, che qualunque sia l'apparato sperimentale usato le relazioni di indeterminazione valgono sempre, proprio perchè sono nella natura stessa delle cose. Anche la misura dell'energia totale di una particella e il tempo in cui si effettua la sua misura sono soggette al principio di indeterminazione:

$$\Delta E \Delta t \geq h$$

Essa esprime il fatto che se una misura che permette di valutare l'energia E di un corpuscolo dura un tempo Δt il valore ottenuto per E è affetto da una incertezza che è superiore od uguale a $h/\Delta t$.

Anche qui la prima disuguaglianza comporta la seconda e viceversa, come mostra la teoria della *relatività* delle misure fisiche *ristretta* ai soli

riferimenti inerziali. Dal principio di indeterminazione nasce dunque l'indeterminismo nella descrizione del moto di una particella, e quindi della previsione dei risultati di future misurazioni eseguite sulla particella.

A nostra consolazione vi è qualche cosa che rimane valido anche nel mondo atomico: sono i

Principi di conservazione. Tutte le esperienze atomiche hanno mostrato con assoluta precisione la validità del principio di conservazione dell'energia, inclusa l'energia intrinseca dovuta alla massa propria di ogni particella (come insegna la teoria della relatività ristretta); del principio di conservazione della quantità di moto, intesa come prodotto della massa relativistica per la velocità e del momento angolare. Citiamo l'esperienza di Bothe e Geiger. Qui notiamo che per la seconda volta abbiamo menzionato la teoria della relatività ristretta di cui è permeata la teoria quantistica.

Inoltre notiamo che la quantità di moto è soggetta a leggi di conservazione nei sistemi isolati e questo è un secondo motivo (dopo quello del suo legame con la lunghezza d'onda) per convincerci che essa è più importante della velocità nella meccanica del mondo atomico. Poiché in meccanica classica i metodi che danno particolare importanza alle quantità di moto sono quelli di Hamilton e quello di Hamilton-Jacobi, è spontaneo pensare che da questi metodi dovrà trarre lo spunto la meccanica quantistica.

Lo spin delle particelle. Alcuni fatti sperimentati (effetto Zeeman anomalo ad es.) rimasti in un primo tempo insoluti portarono all'ipotesi che l'elettrone sia dotato di un momento angolare intrinseco, si comporti cioè come una piccola trottole. Poiché l'elettrone ha anche una carica elettrica è ragionevole pensare che a questo momento angolare sia associato un momento magnetico come se fosse una sfera elettrizzata ruotante. Una celebre esperienza di Stern e Gerlach ha confermato l'esistenza del momento magnetico dell'elettrone. Si è poi scoperto che quasi tutte le particelle atomiche posseggono un momento angolare proprio detto « spin » (che in inglese significa « rotazione ») e che esso è spesso accompagnato dal momento magnetico (lo possiede anche il neutrone che è elettricamente neutro). È stato dimostrato sperimentalmente che anche il fotone, possiede lo spin, ma non ha momento magnetico. È certamente più facile eseguire la misura del momento magnetico di una particella che non del suo momento angolare perché ci si può avvalere di un campo magnetico intenso non omogeneo.

Dalla misura sperimentale del momento magnetico si risale poi al valore del momento angolare che gli è proporzionale come attestano alcune esperienze (ad es. effetto Einstein-de Haas). Il valore del momento angolare intrinseco, o spin è di-

verso per le diverse particelle. L'esperienza rivela che esso è suscettibile di assumere solo alcuni valori che sono multipli della quantità

$$\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} \text{ — essendo } h \text{ la (onnipresente!)}$$

costante di Plank (si noti che le dimensioni dell'azione e del momento angolare coincidono). Così l'elettrone, il protone, il neutrone, il neutrino, il positrone, l'antiprotone ecc.

$$\text{hanno spin } \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}, \text{ il fotone ha spin}$$

$$1 \cdot \frac{h}{2\pi} \text{ i mesoni } (\eta, K, \text{Pi}) \text{ hanno spin}$$

$$\text{zero. In generale lo spin è } s \frac{h}{2\pi} \text{ e}$$

si suole dire brevemente che s è lo spin: $1/2$ per l'elettrone, 1 per il fotone ecc, intendendo misurato in

$$\text{unità } \frac{h}{2\pi}. \text{ La particella soggetta al}$$

l'azione della coppia in virtù del suo momento angolare compie la precessione (detta di Larmor) come fa una trottole attorno alla verticale terrestre. Le esperienze rivelano che non solo lo spin ma anche le sue componenti in una direzione privilegiata assumono valori discreti in numero di $2s + 1$. Così un atomo dell'elemento praseodimio che

$$\text{ha spin } \frac{5}{2} \frac{h}{2\pi} \text{ (o brevemente } 5/2)$$

possiede $2 \cdot 5/2 + 1 = 6$ componenti possibili nella direzione di riferimento; mentre il deuterone (ione del deuterio, un isotopo dell'idrogeno costituito da un neutrone ed un protone uniti) che ha spin 1 (in unità $h/2\pi$) può avere solo $2 \cdot 1 + 1 = 3$ componenti. I valori numerici delle singole componenti infine, differisco-

no di una unità $h/2\pi$ come indica la tabella II.

Il modello iniziale dello spin era quello di una sferetta ruotante e naturalmente il momento angolare fu descritto, come in meccanica classica, con un vettore. Ma questo modello intuitivo, tanto usato nei libri di spettroscopia non spiega tutti i fatti sperimentali in cui lo spin interviene, soprattutto perché la quantizzazione delle componenti dello spin si ha *qualunque* sia la direzione in cui si dispone il campo magnetico misurante, fatto questo incomprensibile con il modello vettoriale. Altri motivi si sono aggiunti che hanno definitivamente portato alla rinuncia a concepire le particelle come dotate di rotazione su se stesse e a concepire lo spin come una nuova grandezza di cui non esiste un analogo classico e che risulta operativamente definita con il metodo con il quale si misura. Ne viene che esso non è più rappresentato da un vettore, ma, come vedremo, da un operatore. Ci si può chiedere allora come mai nei libri di spettroscopia e nella divulgazione della meccanica quantistica lo spin sia ancora rappresentato con un vettore. La risposta è: buona parte dei fenomeni in cui interviene lo spin sono correttamente descritti col modello vettoriale, così come in ottica buona parte dei fenomeni sono descritti col modello di Huyghens (rifrazione, interferenza, diffrazione). Ma come il modello di Huyghens non è in grado di descrivere altri fenomeni ottici (polarizzazione, effetto fotoelettrico, ecc) per cui si deve ricorrere all'elettromagnetismo e addirittura all'elettrodinamica quantistica, così vi sono fenomeni che il modello vettoriale dello spin non è in grado di spiegare (la quantizzazione spaziale rispetto a qualsiasi direzione ad es.).

TABELLA II

spin (unità $\frac{h}{2\pi}$)	numero delle componenti	valori delle singole componenti (in unità $h/2\pi$)
0	$2 \cdot 0 + 1 = 1$	0
1/2	$2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$	$-\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{2}$
1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	-1 0 +1
3/2	$2 \cdot 3/2 + 1 = 4$	$-\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{2} \quad +\frac{3}{2}$
2	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	-2 -1 0 +1 +2
...

TEORIA DELLA MECCANICA QUANTISTICA

I DIVERSI FORMALISMI

Esistono attualmente due formulazioni matematiche diverse, ma equivalenti della meccanica quantistica: quella di Schrödinger e quella di Heisenberg. Esse rientrano come casi particolari di una teoria generale istituita da Dirac che prende il nome di teoria delle trasformazioni. Una eccellente esposizione di questa teoria si trova in Fy III oltre che nello stesso libro di Dirac.

Noi esporremo in questo articolo solo « la rappresentazione » di Schrödinger che è quella più comunemente usata e più facile. Lo schema riportato nella tabella III mostra la corrispondenza tra le rappresentazioni della meccanica quantistica e i metodi della meccanica classica.

portanza della misurazione di una grandezza fisica a causa della *inevitabile ed incontrollabile* perturbazione che essa apporta al sistema misurato.

Se consideriamo un gran numero di sistemi atomici nelle stesse condizioni fisiche ed eseguiamo la misura di una stessa grandezza per ognuno di questi sistemi atomici i risultati delle singole misure non saranno tutti uguali: precisamente otterremo tanti valori che potranno formare un insieme discreto o continuo e ciascuno di questi valori si presenterà con una certa frequenza. (Dr 18).

I risultati di queste misure eseguite su un gran numero di sistemi identici nelle stesse condizioni fisiche possono essere messi in un diagramma (fig. 6).

Se eseguiamo una ulteriore misura della stessa grandezza su un si-

ci questo enorme numero di misure e di fornirci per ogni sistema atomico, note le condizioni fisiche in cui si trova, tanto i possibili risultati di una misura di una grandezza, quanto le rispettive probabilità di manifestarsi. E questo per tutte le grandezze misurabili (o osservabili). Ma come mai una serie di misure di una stessa grandezza effettuate su sistemi di identica costituzione soggetti ad identiche condizioni fisiche non fornisce, come in fisica classica uno stesso valore, a meno degli inevitabili errori sperimentali, bensì fornisce ora l'uno ora l'altro di un insieme di valori possibili? (Si pensi che in fisica classica si fanno diverse misure di una stessa grandezza proprio allo scopo di poterne fare una media eliminando gli errori sperimentali e avvicinandosi così all'unico valore che la grandezza deve avere).

Per rispondere a questa domanda è necessario osservare che vi è un divorzio fondamentale tra il nostro abito mentale costruito sull'esperienza quotidiana, macroscopica, e quello necessario per interpretare, comprendere e prevedere i fatti del mondo microscopico. L'origine di questo divorzio sta nella *ineliminabile ed incontrollabile* perturbazione che, di principio, e quindi anche di fatto, apporta l'atto di una misura nella evoluzione di un sistema microscopico. Citiamo De Broglie:

« L'immagine dei fenomeni che ci fornisce la fisica classica suppone essenzialmente che noi possiamo definire il mondo fisico mediante il valore di certe grandezze senza preoccuparci in modo essenziale del modo con cui noi veniamo a conoscere questi valori, vale a dire a *misurare* queste grandezze. Si suppone dunque implicitamente che si possa, con una tecnica sperimentale assai fine, diminuire indefinitamente la perturbazione che l'esecuzione di una misura esercita sullo stato delle cose esistenti prima della misura. La fisica quantistica ha introdotto la nozione di quanto di azione e si è convinta che l'esistenza di questo quanto di azione non permette di diminuire indefinitamente la perturbazione che una misura esercita su una situazione anteriore: la perturbazione residua, minima è insignificante su grande scala, ma essa diviene preponderante alla scala dei fenomeni elementari: è quello che mostrano gli esempi come quello del microscopio di Heisenberg.

La misura di una grandezza non rivela dunque uno stato di cose esistente prima della misura, ma uno stato di cose creato dalla misura stessa, ed è indispensabile, quando si discute una situazione fisica, di fare intervenire il processo di misura che ci ha permesso di conoscerlo. La misura *estrae* dallo stato delle cose anteriore un valore ben determinato della grandezza misurata. Noi non possiamo più dire in generale, che nello stato delle cose anteriore alla misura una grandezza fisica abbia un valore ben determinato, ma solamente che essa ha dei

TABELLA III

rappresentazione di Schrödinger	rappresentazione di Heisenberg	teoria delle trasformazioni canoniche (Jacobi)
$h \rightarrow 0$ ↓	$h \rightarrow 0$ ↓	$h \rightarrow 0$ ↓
metodo di Hamilton-Jacobi	metodo di Hamilton	teoria delle trasformazioni canoniche (Jacobi)

TEORIA ELEMENTARE DELLA MISURA

Vediamo ora con quale schema concettuale la meccanica quantistica ci dia una descrizione dei fenomeni atomici. Innanzi tutto essa mette in primo piano la enorme im-

stema atomico identico non solo sapremo quali saranno i possibili risultati, ma conosceremo a priori la loro probabilità di manifestarsi: questa probabilità sarà evidentemente uguale alla frequenza registrata nelle precedenti misure.

E compito della teoria risparmiar-

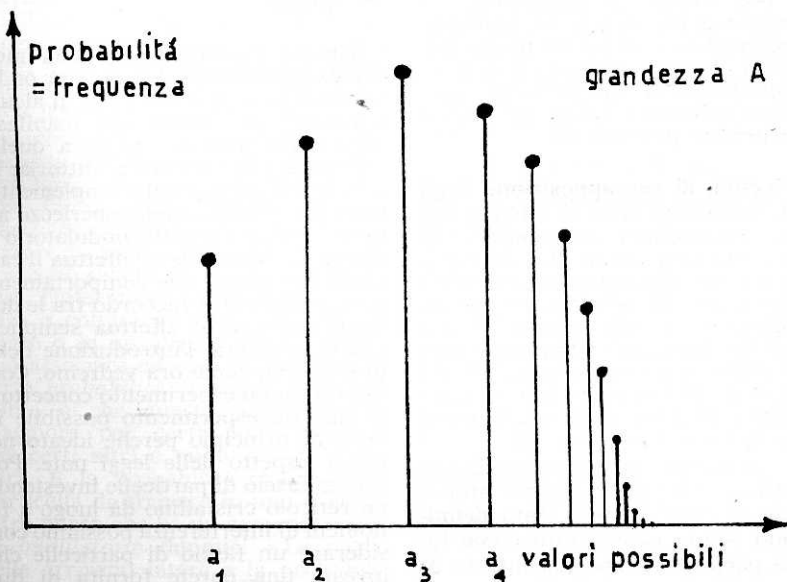


FIG. 6

valori possibili, vale a dire differenti valori che l'operazione di misura può estrarre dallo stato delle cose. La fisica quantistica rappresenterà dunque una situazione fisica con l'insieme dei possibili valori delle diverse grandezze fisiche, ma essa può andare più lontano e attribuire a questi diversi valori delle *probabilità*. La fisica classica descrive il mondo materiale mediante la conoscenza precisa delle grandezze fisiche e della loro evoluzione nel corso del tempo. Al contrario la fisica quantistica descrive la situazione fisica mediante la conoscenza dei possibili valori delle grandezze fisiche e delle loro probabilità rispettive e cerca di seguire il decorso nel tempo di queste probabilità».

E ancora: «Tutti i dispositivi che permettono di misurare esattamente una grandezza che caratterizza un corpuscolo della scala atomica obbliga questo corpuscolo a rivelarsi come presente in uno stato in cui questa grandezza ha un valore ben determinato, ma anteriormente all'azione dell'apparecchio di misura,

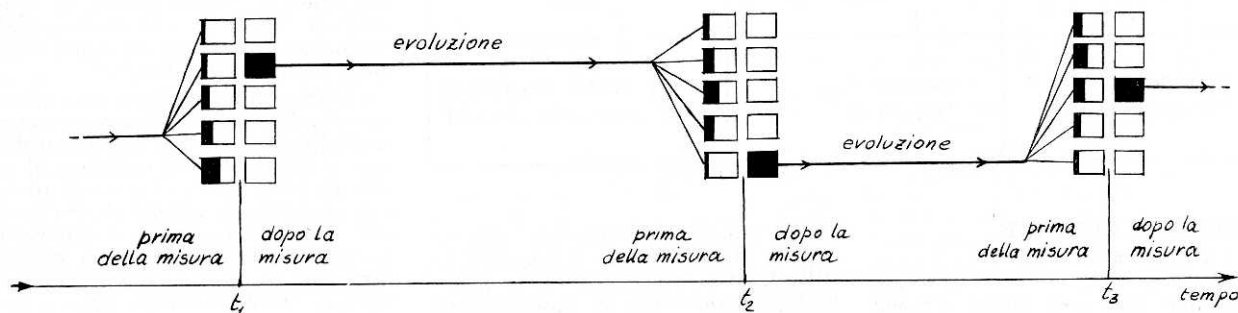
sullo stesso sistema. La teoria dovrà dirci come mutano le singole probabilità in dipendenza del valore ottenuto nella misura della grandezza. Quanto abbiamo detto fin'ora può venire rappresentato con lo schema riportato nella tabella IV.

La linea nera indica l'evoluzione del sistema tra due misure successive. Le caselle (5 in figura) indicano i valori possibili della grandezza misurata, la parte nera di ciascuna casella indica la probabilità di ciascun valore. Dopo che la misura è eseguita si è ottenuto uno dei cinque valori possibili: la sua probabilità (a posteriori) è diventata 1, cioè la certezza. Da questo momento riprende l'evoluzione del sistema a partire dalla nuova situazione. Ne viene che pur rimanendo identici i possibili valori della grandezza risultano diverse (in generale) le probabilità che ciascuno di questi valori ha di presentarsi in una successiva misura: ciò a causa della misura precedente che ha «estratto» uno dei valori. Il sistema atomico subisce due evoluzioni: una conti-

ora l'uno ora l'altro degli stati componenti ma mai lo stato ottenuto per sovrapposizione, questa comporta che vi è una probabilità associata a ciascuno degli stati componenti che una misura riveli essere il sistema nell'uno o nell'altro di questi stati. L'operazione di misura fa, per così dire, «precipitare» la situazione in una delle situazioni di cui quella data si riteneva composta e la probabilità di questa «precipitazione» è legata ai coefficienti della combinazione lineare con cui la sovrapposizione si esprime. Per questo aspetto probabilistico la sovrapposizione della meccanica quantistica è sostanzialmente diversa dalla sovrapposizione che ha luogo in tanti campi della fisica classica.

Principio di corrispondenza. Poiché il mondo macroscopico è assai ben descritto dalla meccanica e dall'elettromagnetismo classico la meccanica quantistica deve fornire come caso limite la meccanica classica. Formalmente questo si deve avere per h tendente a zero.

TABELLA IV



è generalmente impossibile attribuire alla grandezza in questione un valore ben determinato, si può solamente attribuirgli dei possibili valori affetti da *probabilità*. È necessario riflettere bene su questi concetti se si vuol ben comprendere il senso delle previsioni della nuova fisica». (De Broglie I 219).

Quando eseguiamo una misura otteniamo un valore: uno fra un certo insieme di valori possibili. L'esecuzione della misura ha perturbato il sistema il quale subito dopo evolve ma in modo diverso rispetto all'evoluzione che avrebbe seguito se la misura non fosse stata eseguita. Questa diversa evoluzione comporta che siano cambiate le probabilità di ottenere i diversi valori dell'insieme in una futura misura della stessa grandezza. Quindi l'esecuzione della misura di una grandezza altera le probabilità dei risultati delle misure successive della stessa grandezza. Ecco perchè prima abbiamo parlato di misure eseguite su un gran numero di sistemi identici e non di successive misure eseguite

nuova da una misura (effettuata) alla successiva (da effettuare) l'altra brusca, non causale, imprevedibile, al momento della misura. La meccanica quantistica è la prima teoria della fisica che anzichè prevedere il risultato di una misura si limiti a prevederne soltanto i valori possibili e le rispettive probabilità.

Principio di sovrapposizione degli stati. Definiamo cosa si intende per stato: «prendiamo un generico sistema atomico composto di particelle o corpi di proprietà note (massa, momento di inerzia ecc.) che interagiscono secondo leggi di forma assegnate. Compatibilmente con queste ultime risulteranno possibili diversi moti di tali particelle o corpi; ciascuno di detti moti si chiamerà *stato* del sistema». (Dr 15).

Il principio di sovrapposizione consiste in ciò: «un sistema atomico che si trovi in uno stato definito può venire considerato come facente parte contemporaneamente di due o più altri stati». (Dr 16).

Una misura sul sistema rivelerà

Questo è un principio-guida nell'erezione di una meccanica del mondo atomico.

Aspetto probabilistico della meccanica quantistica. La dualità onda-corpuscolo cioè il fatto che in alcuni fenomeni un corpuscolo manifesti un comportamento simile a quello delle onde, non è contraddittoria: lo assicura il principio di complementarità che afferma ogni esperienza atta a rivelare l'aspetto ondulatorio e viceversa. Ma come si effettua il raccordo tra questi due comportamenti così antitetici? Il raccordo tra le due manifestazioni si effettua semplicemente mediante l'introduzione delle probabilità, come ora vedremo. Consideriamo un esperimento concettuale cioè un esperimento possibile in linea di principio perchè ideato nel pieno rispetto delle leggi note. Poiché un fascio di particelle investendo un reticolo cristallino dà luogo a fenomeni di interferenza possiamo considerare un fascio di particelle che investa una parete fornita di due fenditure sufficientemente vicine: è logico attenderci che esso dia luogo

alle frange di interferenza come farebbe un raggio luminoso. Cosa succede se il fascio di particelle è tanto diluito che le particelle siano costrette a passare una alla volta attraverso l'una o l'altra delle due fenditure? Qui il dilemma onda-corpuscolo si manifesta in tutta la sua drammaticità.

Infatti se su uno schermo posto al di là delle fenditure ognuna delle particelle provoca frange di interferenza (basta esporre una lastra fotografica per un tempo brevissimo) allora potremo ben affermare che siamo di fronte ad un fenomeno ondulatorio, ma non avremo più diritto di considerare la « particella » come un corpuscolo, cioè come una unità suscettibile di manifestarsi localmente con delle azioni in cui interviene per intero. Qui la « particella » risulterebbe diluita su una regione notevolmente grande dello spazio, praticamente dipendente dalla distanza alla quale poniamo lo schermo delle due fenditure. Al contrario se osserveremo una macchiolina luminosa per ogni particella che senso ha parlare di un comportamento simile ad un'onda? Cosa accade in realtà?

I fatti hanno mostrato in modo inoppugnabile (esperienza di Taylor sui fotoni, di Bidermann, Souchkine e Fabrikant per gli elettroni), che le particelle provocano sullo schermo delle macchioline, cioè si manifestano come corpuscoli, ma (qui sta la chiave del dramma!) essi *non* cadono tutti nello stesso punto; ognuno di essi va a finire in un punto diverso distribuendosi con maggior frequenza in certe regioni, con minor frequenza in altre, e vi sono delle zone in cui nessun fotone va a cadere. Il risultato è che quando sviluppiamo la lastra fotografica posta sullo schermo che ha accumulato una dopo l'altra le singole particelle noi troviamo le frange di interferenza! In altre parole le frange di interferenza (che mettono in luce il comportamento ondulatorio) sono dovute all'azione di tanti corpuscoli che cadendo in maggior copia in certi punti e meno in altri hanno determinato l'annerimento discontinuo della lastra fotografica (fig. 7).

Sembrerebbe di concludere che l'aspetto ondulatorio è dovuto all'intero fascio di corpuscoli, non al singolo. Ciò è certamente vero, ma se riflettiamo che ogni particella attraversata una delle fenditure (non possiamo sapere quale senza distruggere l'interferenza stessa) può andare a colpire lo schermo o in un punto o in un altro vediamo che si può associare *ad ogni* particella una certa *probabilità* di arrivare in ogni punto e che questa probabilità è maggiore per certi punti, minore per certi altri e nulla per altri ancora. È la probabilità che ha una particella di arrivare in uno o in un altro punto che ha un *comportamento ondulatorio* dunque! « Le particelle arrivano intere e la probabilità di arrivo di queste unità è distribuita come la distribuzione della intensità di un'onda » (Fy 37-6).

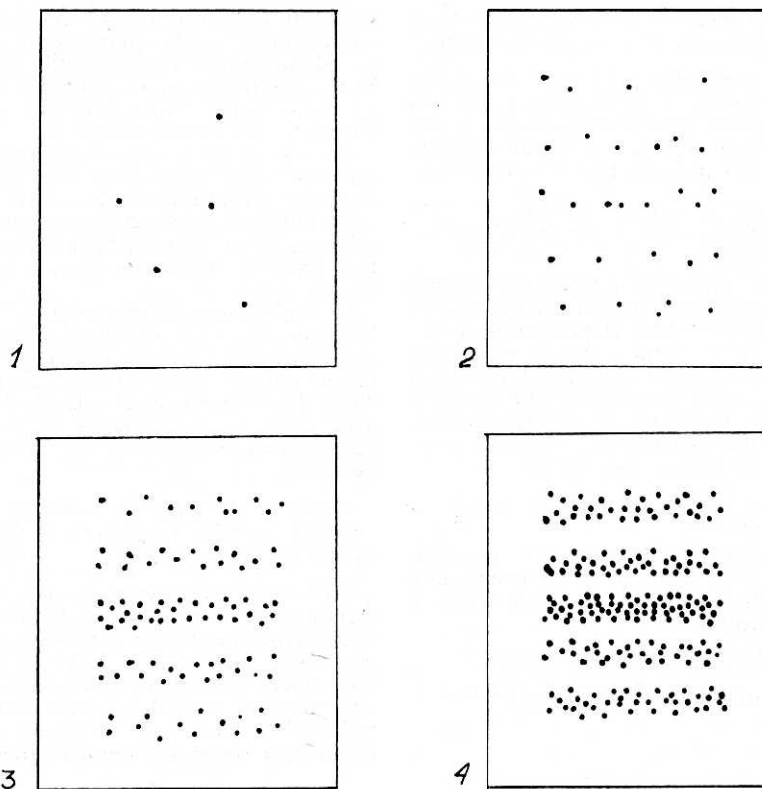


FIG. 7 - Le frange di interferenza sono il risultato dell'arrivo dei fotoni singoli nei diversi punti della lastra fotografica!

Mirabile! ecco svelato il senso della dualità onda-corpuscolo. Il ricordo, come avevamo annunciato si effettua mediante il concetto di probabilità.

Ma cosa dice l'esperienza? L'esperienza conferma in pieno da circa 40 anni di esperimenti, tutte le conseguenze di questa interpretazione!

STRUTTURA MATEMATICA

Ogni teoria della fisica per porta-

re a previsione quantitative richiede una formulazione matematica. I concetti della fisica vengono messi in corrispondenza con enti della matematica: questa associazione si effettua mediante i postulati interpretativi. Una volta effettuata questa corrispondenza le proprietà degli enti matematici devono riflettere proprietà degli enti fisici da essi rappresentati. La struttura della meccanica quantistica si presta magnificamente a mostrare questa associazione.

TABELLA V

grandezze classiche	operatori che ad esse si fanno corrispondere in meccanica quantistica
coordinate x, y, z	moltiplicazione per x, y, z
quantità di moto p _x , p _y , p _z	$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$
energia cinetica $T = \frac{p^2}{2m}$	$\frac{1}{2m} [(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})^2 + (-i\hbar \frac{\partial}{\partial y})^2 + (-i\hbar \frac{\partial}{\partial z})^2] = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$
energia potenziale V	moltiplicazione per V
energia totale E	$+i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$
funzione hamiltoniana H (= T + V)	$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V$

Con quale ente matematico viene descritta una grandezza osservabile?

I - *postulato*: ad ogni grandezza osservabile si fa corrispondere un operatore differenziale che sia lineare, ed hermitiano (e le cui autofunzioni formino un insieme completo).

Come si scelgono gli operatori da far corrispondere alle grandezze osservabili?

Per quelle grandezze che hanno l'analogo nella meccanica classica la scelta si effettua rispettando un certo criterio mentre per le grandezze che non hanno analogo classico (ad es. lo spin) si istituisce per analogia e per tentativi: la interpretazione dei fatti sperimentali sancisce l'esattezza o meno della scelta.

Con questi criteri la scelta è unica?

No. Si hanno diverse possibili scelte, in pratica se ne usano due ma di queste una è più comune e più utile.

Qual è la scelta più usata?

È quella indicata dalla tabella V

$$(\hbar = \frac{h}{2\pi})$$

A cosa servono questi operatori?

Servono per trovare le autofunzioni e gli autovalori corrispondenti a certe condizioni imposte per ragioni fisiche al contorno e nel dominio di variabilità sulle funzioni stesse: devono annullarsi sul contorno e devono essere continue, ad un sol valore, finite nell'interno del dominio.

A cosa servono gli autovalori?

II - *postulato*: gli autovalori di un operatore rappresentano i possibili risultati di una misura eseguita sulla grandezza che ad esso corrisponde.

A cosa servono le autofunzioni?

Le autofunzioni servono a trovare le probabilità del presentarsi dei rispettivi autovalori nella esecuzione della misura: vedremo più tardi come.

Ma il risultato di una misura è sempre un numero reale: come si concilia col fatto che in alcuni operatori compare l'unità immaginaria?

Il fatto che l'operatore sia hermitiano assicura, nonostante la presenza della unità immaginaria, che gli autovalori siano numeri reali: ciò rende lecita l'identificazione con i risultati di una misura.

Esistono altre precisazioni da fare sugli operatori?

Sì, almeno tre: gli operatori si dividono in completi e incompleti, ad autovalori degeneri e non degeneri e possono operare su funzioni definite in un dominio finito o infinito.

Un operatore si dice incompleto quando esso interessa solo alcune

variabili (ad esempio gli operatori corrispondenti alla quantità di moto, al momento angolare, alla posizione) completo se le interessa tutte (ad esempio l'operatore che corrisponde all'energia cinetica).

Un operatore si dice degenerare se ad uno stesso autovalore corrispondono più autofunzioni. Se poi il dominio di definizione dell'operatore è infinito, oltre allo spettro discreto può esistere anche lo spettro continuo.

Non abbiamo ancora risposto alla domanda: che probabilità hanno di presentarsi i diversi valori di una grandezza nel corso di una sua misura? La risposta la possiamo dare solo dopo aver precisato come si caratterizza lo stato di un sistema atomico.

Come si descrive lo stato di un sistema atomico (particella o insieme di particelle)?

III - *postulato*: lo stato di un sistema atomico ad n gradi di libertà è descritto da una funzione $\psi(q^1, q^2, \dots, q^n, t)$ dipendente dalle coordinate libere e del tempo. Si tratta di una funzione complessa delle variabili reali e come tale si può scomporre in uno dei due modi seguenti:

$$\psi = F + iG = Ae^{i\varphi}$$

essendo F, G, A, φ funzioni reali. È particolarmente utile la seconda scomposizione: A prende il nome di ampiezza e φ di fase. Tutte le possibili informazioni riguardanti il sistema atomico esigono la conoscenza di questa funzione.

Come si trova la funzione ψ ?

IV - *postulato*: per ogni sistema atomico esiste un operatore che prende il nome di operatore hamiltoniano il quale determina la variazione temporale della funzione d'onda durante l'intervallo di tempo in cui il sistema non è disturbato (una misura rappresenta un disturbo) attraverso l'equazione

$$H\psi(q, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial t}$$

detta equazione temporale di Schrödinger.

Di questa equazione differenziale lineare (con q intendiamo il complesso delle q^1, q^2, \dots, q^n) alle derivate parziali del secondo ordine nelle derivate spaziali del primo ordine nella derivata temporale, le soluzioni accettabili devono essere fornite, continue, ad un sol valore e devono annullarsi al contorno e, se il dominio è infinito, devono tendere a zero all'infinito con sufficiente rapidità in modo tale che, in ogni caso l'integrale (che qui scriviamo per una particella solamente)

$$\iiint_V |\psi(q, t)|^2 dV$$

sia un numero finito. La condizione di annullamento al contorno lascia scoperta una costante arbitraria (numero complesso $\alpha e^{i\theta}$) il suo mo-

dulo (α) può allora scegliersi in modo che

$$\iiint_V |\psi(q, t)|^2 dV = 1$$

mentre la fase (φ) rimane imprecisata (ciò non avrà conseguenze fisiche). Questa condizione si dice di normalizzazione.

Ma come si trova l'operatore H ?

L'operatore differenziale H si ottiene dalla funzione H che è la somma dell'energia cinetica (espressa in termini delle quantità di moto anziché della velocità) e della energia potenziale, sostituendo alle grandezze i rispettivi operatori. La stessa equazione temporale di Schrödinger si ottiene dalla relazione classica $H = E$ con la sostituzione delle grandezze con i rispettivi operatori indicata nella tabella precedente.

Questo nel caso in cui il sistema atomico abbia un analogo macroscopico (o come si dice un « analogo classico »).

Cosa si fa con la funzione ψ ?

Determinata la funzione ψ per il problema considerato (con un certo dominio, un determinato contorno, un assegnato potenziale e un certo sistema e numero di gradi di libertà) con essa si può rispondere a due fondamentali domande: quale è la probabilità di trovare, eseguendo un esperimento, la particella in una regione dV dello spazio e quale è la probabilità che una misura di una grandezza fornisca i singoli valori. Precisamente:

V - *postulato*: la probabilità di trovare la particella entro il volume dV ad un certo istante t è data da:

$$dP(p, t) = |\psi(q, t)|^2 dV$$

la funzione $|\psi|^2$ è reale ed in quanto rappresenta la probabilità di localizzazione per unità di volume viene chiamata densità di probabilità ed indicata con $\rho(q, t)$:

$$\rho(q, t) = |\psi(q, t)|^2 = \psi(q, t)\psi^*(q, t)$$

dove l'asterisco indica la funzione complessa coniugata. La funzione $\psi(q, t)$ prende di conseguenza il nome di ampiezza di probabilità o funzione d'onda; la condizione di normalizzazione comporta che la probabilità di trovare la particella entro l'intero volume V sia uguale all'unità, cioè sia la certezza.

Questa interpretazione appare molto strana: si può giustificare?

Sì, con considerazioni elementari sulla teoria delle onde si trae lo spunto per questa interpretazione: si veda ad es. BD I 165.

VI - *postulato*: la probabilità che la misura della grandezza A dia uno dei suoi possibili valori α_k (se l'operatore che gli corrisponde è completo e ad autovalori non degeneri) è data dal quadrato del modulo del coefficiente dello sviluppo in serie della funzione d'onda $\psi(q, t)$ in termini delle autofunzioni dell'operato-

re (ecco a cosa servono le autofunzioni!). Se è

$$\psi(q, t) = \sum_K c_K(t) \psi_K(q)$$

la probabilità all'istante t sarà:

$$P_{aK}(t) = |c_K(t)|^2$$

Se l'operatore non è completo o alcuni suoi autovalori sono degeneri è necessario fare alcune semplici considerazioni in più per ottenere la probabilità.

A questo punto il lettore probabilmente sarà sopraffatto dallo sgomento per le troppe novità matematiche e per la stranezza dell'intero schema.

Ma con un po' di meditazione (non si può pensare di comprendere al volo un patrimonio di concetti creati faticosamente in un quarantennio di costruzione della teoria!) ci si accorge che il patrimonio matematico lungi dall'essere difficile è semplicemente poco familiare. Una chiarissima presentazione dell'apparato matematico si trova in DB II. La « stranezza » si rivela come una insospettata ed entusiasmante armonia prestabilita tra il mondo della matematica ed il mondo atomico. Non è certo retorica l'affermare che sembra quasi miracoloso che nella sia pur grande varietà degli enti della matematica, libera invenzione della mente umana, si siano trovati i pezzi così ben adatti a comporre una costruzione teorica che descrive così perfettamente l'apparente caos dei fenomeni del mondo atomico.

Lo schema della tabella VI raccoglie i fatti fondamentali che il lettore interessato farà bene a tener sempre presente.

TABELLA VI

operatore A	$\left\{ \begin{array}{l} A\varphi_n = a_n \varphi_n \\ \text{condiz. al} \\ \text{contorno} \end{array} \right.$	$\psi(q, t) \left\{ \begin{array}{l} H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \text{condiz. al} \\ \text{contorno} \end{array} \right.$	$\psi = \sum_n c_n \varphi_n$
↑	↓	↑	↓
A grandezza osservabile	$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ possibili risultati di una misura di A	stato del sistema $dP = \psi ^2 dV$ probabilità di localizzare una particella entro dV	$P_{an} = c_n ^2$ probabilità di trovare il valore a_n

Vediamo le conseguenze più salienti della struttura che abbiamo costruito. Sappiamo che esistono coppie di variabili che non sono misurabili simultaneamente con precisione assoluta, come la quantità di moto lungo una direzione e la corrispondente ascissa (p_x e x) queste grandezze si dicono *incompatibili*. La teoria ci fornisce un criterio per sapere a priori se due grandezze sono o no compatibili? Certamen-

te! Due grandezze A e B sono compatibili se i loro operatori applicati successivamente ad una stessa funzione in un certo ordine e nell'ordine inverso, producono la stessa funzione: cioè

$$AB f = g \quad e \quad BA f = g$$

In tal caso si dice che gli operatori *commutano*. Dunque nella proprietà matematica della commutatività degli operatori è riflessa la circostanza fisica della possibilità di una misura simultanea delle due grandezze corrispondenti. E quello che ci dobbiamo attendere da una teoria.

Sappiamo dall'esperienza che quando due grandezze osservabili non sono compatibili esse sono soggette al principio di indeterminazione di Heisenberg: la teoria matematica rende conto di questo fatto? Ancora sì! Se consideriamo gli scarti quadratici medi di due grandezze incompatibili è possibile dedurre che il prodotto di tali scarti deve essere maggiore od uguale a $1/2 \hbar$, cioè si deduce la relazione di indeterminazione di Heisenberg.

DESCRIZIONE GEOMETRICA

Ma un capolavoro di descrizione matematica della meccanica atomica sta nella descrizione degli eventi mediante la interpretazione geometrica della funzione ψ . Questa funzione complessa appartiene alla categoria delle funzioni « a quadrato sommabile », cioè tali che l'integrale del quadrato del modulo sia un numero finito. Di funzioni del genere naturalmente ne esistono infinite. Se

zione ψ o gli infiniti coefficienti del suo sviluppo in serie di certe autofunzioni è esattamente equivalente. D'altro canto anche un comune vettore nel nostro spazio tridimensionale è caratterizzato da sole tre componenti relative ad una terna di assi: dare un vettore o le sue tre componenti è la stessa cosa, nel senso che tutte le proprietà del vettore e le operazioni che su di esso si vogliono eseguire possono ottenersi dall'esame delle componenti.

Questa analogia suggerisce di immaginare, a solo scopo descrittivo, gli infiniti coefficienti dello sviluppo in serie della funzione ψ come componenti di un vettore in uno spazio ad infinite dimensioni. Nessun timore! Nulla vieta alla nostra intelligenza di concepire quello che non possiamo realizzare. Questo vettore risulta così associato alla funzione ψ : ogni vettore di questo spazio rappresenta una funzione ψ e viceversa. Mentre un vettore ordinario è indicato con una freccia posta sulla lettera, un vettore di questo spazio di infinite dimensioni (che si chiama spazio Hilbert) è indicato con la notazione $|\psi\rangle$ dovuta a Dirac. Anche le autofunzioni con cui è sviluppata la funzione ψ sono rappresentabili da vettori in questo spazio di Hilbert: l'insieme di questi vettori si dice che forma una «base» dello spazio. L'analogia tra lo spazio dei vettori tridimensionale e lo spazio di Hilbert si spinge ben oltre. Come il prodotto scalare tra due vettori si ottiene facendo i prodotti delle componenti omonime e sommandoli

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{K=1}^3 u_K v_K$$

così si può definire per i vettori dello spazio di Hilbert il prodotto scalare come la somma dei prodotti delle componenti di ugual indice dei due vettori. Con la nuova notazione (estremamente opportuna) il prodotto scalare si indica così

$$\langle \psi | \Phi \rangle = \sum_K c_K b_K$$

essendo

$$\psi = \sum_K c_K \varphi_K \quad \Phi = \sum_K b_K \varphi_K$$

Questo prodotto scalare è un numero complesso, perchè complessi sono i coefficienti c_K e b_K in quanto sono complesse le funzioni ψ e Φ . Ma la somma del secondo membro è uguale all'integrale qui sotto indicato come si constata facilmente:

$$\sum_K c_K b_K = \iiint_V \psi(q, t) \Phi(q, t) dV$$

Noi sappiamo che due vettori ortogonali hanno il prodotto scalare nullo. Chiameremo «ortogonali» nel-

lo spazio di Hilbert due vettori per cui

$$\langle \psi | \Phi \rangle = \sum_{\kappa} c_{\kappa} b_{\kappa} = \iiint_V \psi \Phi dV = 0$$

Nel linguaggio corrente si dice che le due funzioni ψ e Φ sono « ortogonali » ma il senso di questa frase è chiarito dalle considerazioni fatte poco fa: meglio evitare all'inizio linguaggi ermetici che rendono antipatica ed incomprensibile la tanto preziosa matematica. Orbene si scopre tosto che due generiche autofunzioni corrispondenti ad un operatore hermitiano (non precisiamo per ora cosa voglia dire hermitiano, intanto ci interessa la precisione) sono tali che i loro vettori nello spazio di Hilbert risultano ortogonali nel senso su detto: cioè

$$\langle \varphi_{\kappa} | \varphi_{\eta} \rangle = \iiint_V \varphi_{\kappa}(q) \varphi_{\eta}(q) dV = 0$$

Ma questo ci dice che nello spazio a infinite dimensioni i vettori che corrispondono alle autofunzioni sono ortogonali, proprio come accade

per i versori i, j, k che usiamo in meccanica! Non basta: il quadrato della lunghezza di un vettore è dato dall'espressione

$$V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = \sum_{\kappa} |V_{\kappa}|^2$$

Analogamente potremo definire il quadrato della « lunghezza » di un vettore $|\psi\rangle$ come dato dall'espressione

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{\kappa} |c_{\kappa}|^2 = \iiint_V |\psi|^2 dV$$

In particolare se accade che questo numero, che è sempre reale e positivo, è uguale ad uno, diciamo che il vettore è unitario o « normalizzato ». In questo senso il vettore ψ che caratterizza lo stato del sistema atomico è un vettore unitario (si ricordi infatti la condizione imposta alla funzione ψ). Le autofunzioni sono sempre determinate a meno di una costante moltiplicativa: si può quindi fissare in modo tale che le norme dei corrispondenti vettori valgano uno. Così l'analogia con i versori dello spazio ordinario è completa. Ci siamo così costruiti (nella mente, è chiaro) uno spazio che ha gli stessi ingredienti dello spazio tridimensionale vettoriale tanto usato nella meccanica classica. Questa astrazione (ma è poi così eccessiva?) non è certamente essenziale per la comprensione della meccanica quantistica, ma rende particolarmente intuitive le operazioni eseguite con la matematica: è questa una esigenza che non può essere certo disprezzata da un ingegnere! Costruito il telaio veniamo ora a descrivere l'evoluzione di un sistema atomico mediante questo modello mentale. Lo stato di un siste-

ma atomico, ad esempio di una sola particella, è individuato da una funzione ψ e quindi da un vettore nello spazio di Hilbert. Questa funzione varia con il tempo e altrettanto farà il vettore. Ma la funzione ψ mantiene sempre durante l'evoluzione norma unitaria: quindi il vettore nello spazio di Hilbert che gli corrisponde lo possiamo pensare come ruotante attorno all'origine ma che conserva intatta la sua lunghezza. Cosa succede se facciamo una misura di una grandezza A ? L'atto della misura perturberà il sistema (quindi la funzione ψ , quindi il vettore $|\psi\rangle$) e la misura rivelerà uno dei valori possibili della grandezza A . Ma questi valori sono gli autovalori dell'operatore corrispondente, e poichè subito dopo la misura il valore ottenuto ha probabilità uno e tutti gli altri valori hanno probabilità zero, vuol dire che le componenti della funzione ψ immediatamente dopo la misura sono tutte nulle, salvo una che vale uno! Cioè

$$\begin{aligned} \psi \text{ prima} &= c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n + \dots \\ \psi \text{ dopo} &= 0 \varphi_1 + 1 \varphi_2 + \dots + 0 \varphi_n + \dots \end{aligned}$$

Ma questo vuol dire che la funzione ψ coincide con la autofunzione corrispondente all'autovalore trovato, ad esempio il vettore $|\psi\rangle$ coincide con il vettore $|\varphi_2\rangle$. Questo si può esprimere dicendo che l'effetto della misura sul sistema è rappresentato nel nostro modello mentale come la « precipitazione » del vettore $|\psi\rangle$ su una delle direzioni degli assi, su quella corrispondente all'autovalore trovato. Da questo momento il sistema riprende l'evoluzione, il vettore $|\psi\rangle$ riprende a ruotare: prima della esecuzione di una misura egli ha una certa probabilità di « precipitare » su uno degli assi. La probabilità di questo precipizio su ciascuno degli assi (cioè la probabilità che la misura dia il corrispondente autovalore) è data dal quadrato della componente del vettore sull'asse rispettivo.

Ma se misuriamo un'altra grandezza B ? Ebbene poichè un'altra grandezza corrisponderà ad un'altro operatore esso avrà altre autofunzioni che formeranno un'altro sistema di assi nello spazio di Hilbert (è come se fosse ottenuto ruotando gli assi precedenti). Ebbene la misura della grandezza B farà precipitare il vettore φ lungo una di questi nuovi assi: l'autovalore che gli corrisponde sarà il risultato della misura.

Come non rimanere incantati dalla bellezza di questo modello mentale? E si potrebbe andare avanti per un pezzo a mostrare le meraviglie di questa interpretazione.

Ci basti accennare che questa analisi è il punto di partenza della teoria delle trasformazioni di Dirac che costituisce uno schema generale della meccanica quantistica, più ricco della meccanica analitica classica e in cui le « rappresentazioni » di Schrödinger e di Heisenberg rientrano come casi particolari.

CONCLUSIONE

Giunti in fondo l'autore ha la sensazione di aver scoraggiato l'interesse per la meccanica quantistica nel lettore: ma non si poteva fare troppo diversamente. Certo che alcuni esempi avrebbero giovato, ma la matematica che avremmo dovuto esibire avrebbe richiesto ben altro spazio e comunque non si addiceva ad uno sguardo panoramico, incompleto, fugace quale è quello che l'autore ha tentato di dare. Sta di fatto che la tecnologia ha già invaso il mondo atomico: dalle proprietà dei solidi, alla teoria dei semiconduttori, all'applicazione delle basse temperature, alla superconduttività, alla tecnologia nucleare, ai laser, ai maser, al microscopio elettronico, ecc.: un ingegnere proteso verso le applicazioni attuali e future delle conquiste della fisica moderna, non può rinunciare a conoscere sia pure i rudimenti di quella scienza, tanto utile ed entusiasmante che si chiama *meccanica quantistica*.

Dr. ENZO TONTI

Politecnico di Milano

BIBLIOGRAFIA:

- (DB I) L. DE BROGLIE - *Eléments de théorie des quanta et de mécanique ondulatoire* - Gauthier-Villars 1959.
- (DB II) L. DE BROGLIE - *Théorie de la qualification dans la nouvelle mécanique* - Hermann 1932 - (a mio parere sono i due libri più chiari ed elementari sulla meccanica quantistica: il primo espone la parte fisica, il secondo quella matematica).
- (Dr) P.A.M. DIRAC - *I principi della meccanica quantistica* - Boringhieri 1959.
- (HS) W. HEISENBERG - *I principi fisici della teoria dei quanti* - Boringhieri 1953.
- (Bh) N. BOHR - *Atomic theory and the description of nature* - Cambridge.
- (Fy) R. FEYMANN - *Lectures on physics* Vol. I, II, III - Addison Wesley 1963. (A parere di molti è il più bel libro di fisica che fu mai scritto. Il terzo volume è tutto dedicato ad una moderna esposizione della meccanica quantistica, che non mi sento però di consigliare in prima lettura).