Domanda 1 (5 punti)

Sia dato il circuito di Fig. 1, funzionante in regime alternato sinusoidale alla frequenza di 50Hz, in cui: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 0.5\Omega$, $R_d = 50\Omega$, $X_1 = 2\Omega$, $X_2 = 1\Omega$, $X_d = 100\Omega$. Siano inoltre note la tensione $V_c = 200$Vrms di alimentazione al carico, la corrente $I_c = 10$Arms assorbita dal carico e la potenza attiva $P_c = 1.7$kW assorbita dal carico. Sia il carico di tipo ohmico-induttivo.

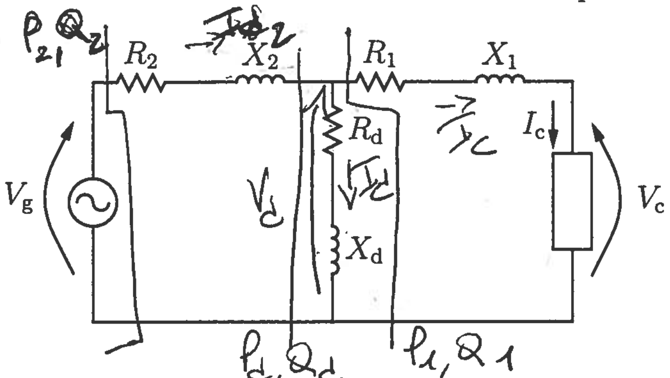


Figura 1: Circuito in regime alternato sinusoidale della Domanda 1.

(a) Si calcoli la tensione V_g del generatore.

(b) Si calcoli lo sfasamento tra la tensione V_g e la corrente erogata dal generatore.

CARICO SERIE

$$R_c = \frac{P_c}{I_c^2} = 17\Omega$$

$$Q_c = \sqrt{V_c^2 I_c^2 - P_c^2} = 1{,}054 \text{ kVAR}$$

$$X_c = \sqrt{\frac{V_c^2}{I_c^2} - R_c^2} = 10{,}54\,\Omega$$

$$= \frac{Q_c}{I_c^2}$$

$$Z = R_c + jX_c = 17 + j10{,}54\,\Omega$$

CARICO PARALLELO

$$R_c = \frac{V_c^2}{P_c} = 23{,}53\,\Omega$$

$$Q_c = \sqrt{V_c^2 I_c^2 - P_c^2} = 1{,}054 \text{ kVAR}$$

$$X_c = \frac{V_c^2}{Q_c} = 37{,}97\,\Omega$$

$$Z = j\frac{R_c X_c}{R_c + jX_c} = 17 + j10{,}54\,\Omega$$

$$P_1 = P_c + R_1 I_c^2 = 1{,}8 \text{ kW}$$

$$Q_1 = Q_c + X_1 I_c^2 = 1{,}254 \text{ kVAR}$$

$$V_d = \frac{\sqrt{P_1^2 + Q_1^2}}{I_c} = 219{,}35\,V$$

$$Z_d = \sqrt{R_d^2 + X_d^2} = 111{,}80\,\Omega$$

$$I_d = \frac{V_d}{Z_d} = 1{,}962\,A$$

$$P_d = P_1 + R_d I_d^2 = 1{,}993 \text{ kW}$$

$$Q_d = Q_1 + X_d I_d^2 = 1{,}639 \text{ kVAR}$$

$$I_2 = \frac{\sqrt{P_d^2 + Q_d^2}}{V_d} = 11{,}76\,A$$

$$P_2 = P_d + R_2 I_2^2 = 2{,}062 \text{ kW}$$

$$Q_2 = Q_d + X_2 I_2^2 = 1{,}777 \text{ kVAR}$$

$$V_g = \frac{\sqrt{P_2^2 + Q_2^2}}{I_2} = 231{,}42\,V$$

$$\varphi = 0{,}7113 \text{ rad}$$

$$= 40{,}76°$$

FASORI

CARICO SERIE

$\dot V_c = V_c$

$R_c = \frac{P_c}{I_c^2} =$

$Q_c = \sqrt{V_c^2 I_c^2 - P_c^2}$

$X_c = \sqrt{\frac{V_c^2}{I_c^2} - R_c^2}$

$Z_c = R_c + jX_c$

$\dot I_c = \frac{\dot V_c}{Z_c} = 8{,}5 - j5{,}27\,A$

$Z_1 = R_1 + jX_1$

$\dot V_1 = Z_1 \dot I_c = 19{,}036 + j11{,}73\,V$

$\dot V_d = \dot V_c + \dot V_1 = 219{,}036 + j11{,}73\,V$

$Z_d = R_d + jX_d$

$\dot I_d = \frac{\dot V_d}{Z_d} = 0{,}97 - j1{,}705\,A$

$\dot I_2 = \dot I_c + \dot I_d = 9{,}47 - j6{,}97\,A$

$Z_2 = R_2 + jX_2$

$\dot V_g = \dot V_d + \dot V_2 = 230{,}744 + j17{,}716\,V$

$|\dot V_g| = 231{,}42\,V$

$(\varphi_{V_g} - \varphi_{I_2}) = 40{,}76°$

$\dot I_c = I_c$

$\dot V_c = Z_c \dot I_c = 170 + j105{,}36\,V$

$\dot V_1 = 10 + j20\,V$

$\dot V_d = 180 + j125{,}36\,V$

$\dot I_d = 1{,}723 - j0{,}94\,A$

$\dot I_2 = 11{,}723 - j0{,}94\,A$

$\dot V_g = 186{,}8 + j136{,}61\,V$

$|\dot V_g| = 231{,}42\,V$ $\quad \varphi_{V_g} - \varphi_{I_2} = 40{,}76°$

CARICO PARALLELO

$\dot V_c = V_c$

$R_c = \frac{V_c^2}{P_c}$

$Q_c = \sqrt{V_c^2 I_c^2 - P_c^2}$

$X_c = \frac{V_c^2}{Q_c}$

$Z_c = j\frac{R_c X_c}{R_c + jX_c}$

$\dot I_c = \frac{\dot V_c}{Z_c} = 8{,}5 - j5{,}27\,A$

$\dot V_1 = Z_1 \dot I_c = 19{,}036 + j10{,}54\,V$

$\dot V_d = \dot V_c + \dot V_1 = 219{,}036 + j11{,}73\,V$

$\dot I_d = \frac{\dot V_d}{Z_d} = 0{,}97 - j1{,}705\,A$

$\dot I_2 = \dot I_c + \dot I_d = 9{,}47 - j6{,}97\,A$

$\dot V_2 = Z_2 \dot I_2 = 11{,}71 + 5{,}98\,V$

$\dot V_g = \dot V_d + \dot V_2 = 230{,}74 + j17{,}72\,V$

$|\dot V_g| = 231{,}42\,V$ $\quad \varphi_{V_g} - \varphi_{I_2} = 40{,}76°$

$\dot I_c = I_c$

$\dot V_c = Z_c \dot I_c = 170 + j105{,}36\,V$

$\dot V_1 = 10 + j20\,V$

$\dot V_d = 180 + j125{,}36\,V$

$\dot I_d = 1{,}723 - j0{,}94\,A$

$\dot I_2 = 11{,}73 - j0{,}94\,A$

$\dot V_2 = 6{,}8 + j11{,}25\,V$

$\dot V_g = 186{,}8 + j136{,}61\,V$

Domanda 2 (6 punti)

Sia dato il circuito in regime transitorio di Fig. 2 in cui: $V_{s_1} = 10\text{V}$, $V_{s_2} = 2\text{V}$, $R_1 = 2\text{k}\Omega$, $R_2 = 10\text{k}\Omega$, $R_3 = 0.2\text{k}\Omega$, $C = 2\mu\text{F}$. Si consideri il circuito a regime per $t < 0$.

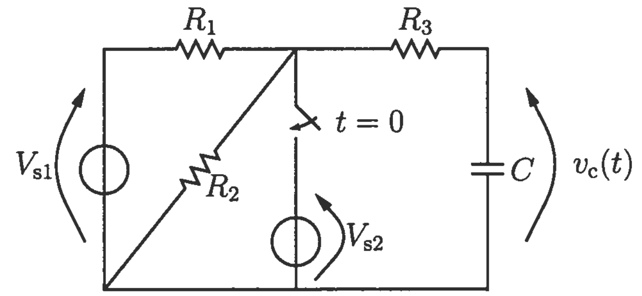


Figura 2: Circuito in regime transitorio della Domanda 2.

(a) Si determini l'espressione analitica della tensione $v_c(t)$ ai capi del condensatore e se ne fornisca la rappresentazione grafica.

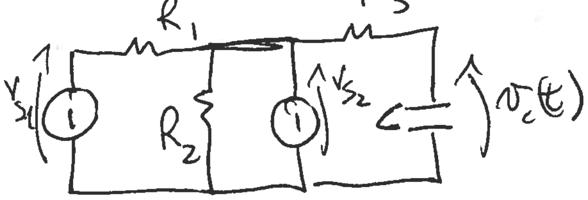
(b) Si calcoli la potenza istantanea erogata dal condensatore all'istante $t = 2\text{ms}$.

$t<0$

$$v_c(0^-) = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_{s1} = 8{,}33\text{V}$$

$$v_c(0^+) = v_c(0^-)$$

$t \to \infty$



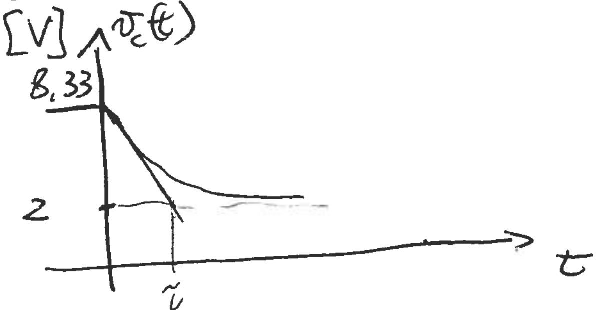
$$v_c(\infty) = V_{s2} = 2\text{V}$$

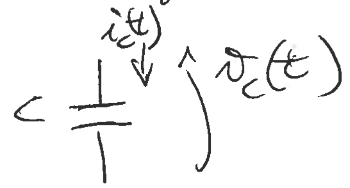
$$R_{eq} = R_3$$

$$\tau = R_{eq}C = R_3 C = 0{,}4\,\text{ms}$$

$$v_c(t) = \left[\frac{R_2}{R_1+R_2} V_{s1} - V_{s2}\right] \exp\left(-\frac{t}{R_3 C}\right) + V_{s2}$$

$$2\,\text{mS} = 5\tau$$





$$i_c(t) = C\frac{dv_c}{dt}$$

$$= -\frac{1}{R_3}\left[\frac{R_2}{R_1+R_2} V_{s1} - V_{s2}\right] \exp\left(-\frac{t}{R_3 C}\right)$$

$$p(t)\Big|_{t=2ms} = -i_c(t)\, v_c(t)\Big|_{t=2ms} \simeq 0\text{W}$$

$$\boxed{0{,}436\ \text{mW}}$$

Domanda 3 (4 punti)

Sia dato il circuito in regime alternato sinusoidale di Fig. 3. Si determini il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti A,B.

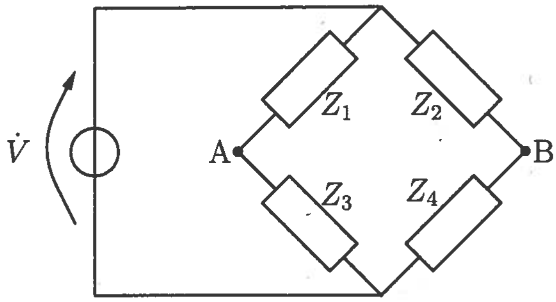
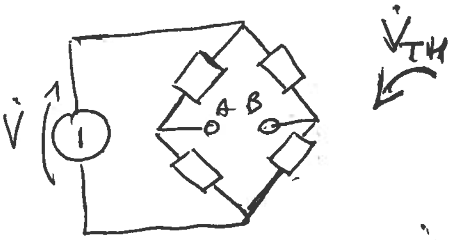


Figura 3: Circuito in regime alternato sinusoidale della Domanda 3.



$$\dot I_1 = \frac{\dot V}{Z_1+Z_3} \qquad \dot I_2 = \frac{\dot V}{Z_2+Z_4}$$

$$Z_3 \dot I_1 - \dot V_{TH} + Z_2 \dot I_2 = \dot V$$

$$Z_4 \dot I_2 + \dot V_{TH} + Z_1 \dot I_1 = \dot V$$

$$2\dot V_{TH} + (Z_1 - Z_3)\dot I_1 + (Z_4 - Z_2)\dot I_2 = 0$$

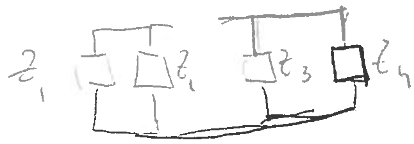
$$\dot V_{TH} = -\frac{\dot V}{2}\left[\frac{Z_1-Z_3}{Z_1+Z_3} + \frac{Z_4-Z_2}{Z_2+Z_4}\right]$$

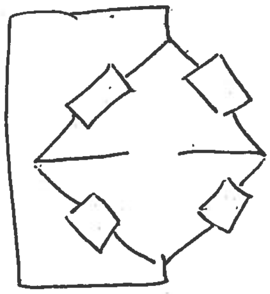
$$= -\frac{Z_1Z_4 - Z_2Z_3}{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_4)}\dot V$$

$$\dot V_{TH} = \left(\frac{Z_3}{Z_1+Z_3} - \frac{Z_4}{Z_2+Z_4}\right)\dot V$$

$$= \left(\frac{Z_2}{Z_2+Z_4} - \frac{Z_1}{Z_1+Z_3}\right)\dot V$$

Z_{TH}





$$Z_1 // Z_3 + Z_2 // Z_4 = Z_{TH}$$

$$Z_{TH} = \frac{Z_1Z_3}{Z_1+Z_3} + \frac{Z_2Z_4}{Z_2+Z_4}$$

$$= \frac{Z_1Z_4(Z_2+Z_3)+Z_2Z_3(Z_1+Z_4)}{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_4)}$$

Domanda 7 (2 punti)

Sia dato il circuito in regime sinusoidale di Fig. 4 e si supponga di conoscere L e C. Si rappresenti la differenza di fase fra $\dot{V}_L$ ed $\dot{E}$ (cioè $\angle\dot{V}_L - \angle\dot{E}$) per $\omega \in (-\infty, +\infty) \setminus \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

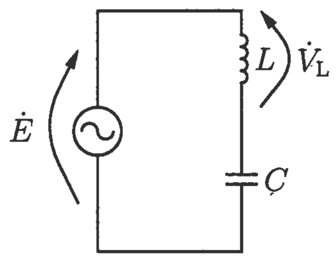


Figura 4: Circuito in regime alternato sinusoidale della Domanda 7.

$$\dot{V}_L = j\omega L \dot{I}_L$$

$$\dot{I}_L = j\omega C \dot{V}_C$$

$$\dot{V}_L = -\omega^2 LC \dot{V}_C$$

$$\dot{V}_L + \dot{V}_C = \dot{E} \qquad \dot{V}_C = \dot{E} - \dot{V}_L$$

$$\dot{V}_L = -\omega^2 LC \dot{E} + \omega^2 LC \dot{V}_L$$

$$(1-\omega^2 LC)\dot{V}_L = -\omega^2 LC \dot{E}$$

$$\dot{V}_L = \frac{\omega^2 LC}{\omega^2 LC - 1}\dot{E} \in \mathbb{R} \qquad \varphi = \angle\dot{V}_L - \angle\dot{E}$$

$$\varphi \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \pi \end{matrix} \right.$$

$$\omega^2 LC - 1 > 0 \Rightarrow \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}} \cup \omega < -\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \varphi = 0$$

$$\omega^2 LC - 1 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{LC}} < \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \varphi = \pi$$